Análise no $\mathbb{R}^n$

MA720 – 1º semestre de 2025

Tiago J. Fonseca*

Sumário

Introdução **5**

Notas de aula **8**

1 27/02 **8**

0) Introdução 8

2 06/03 **13**

1) Derivadas direcionais 13

3 11/03 **19**

2) Funções de classe C^k 19

3) Diferencial de uma função 22

4 13/03 **24**

3) Diferencial de uma função (cont.) 24

5 18/03 **30**

4) Desigualdade do valor médio 30

5) Fórmulas de Taylor 32

6 20/03 **34**

5) Fórmulas de Taylor (cont.) 34

*Notas digitalizadas com o auxílio de inteligência artificial a partir do manuscrito do professor, sem revisão cuidadosa; veja a Introdução.

7 25/03 **38**
6) Pontos críticos 38

8 27/03 **43**
7) Otimização 43

9 03/04 **48**
8) Aplicações diferenciáveis 48

10 08/04 **53**
9) Regra da cadeia 53

11 10/04 **58**
10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa 58

12 22/04 **63**
10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa (cont.) 63

13 24/04 **68**
10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa (cont.) 68
11) Teorema da função implícita 70

14 28/04 **73**
11) Teorema da função implícita (cont.) 73

15 06/05 **77**
11) Teorema da função implícita (cont.) 77
12) Imersões, submersões e posto constante 79

16 08/05 **82**
12) Imersões, submersões e posto constante (cont.) 82

17 13/05 **87**
12) Imersões, submersões e posto constante (cont.) 87

18 15/05 **91**
13) Variedades diferenciáveis (“suaves”) 91

19 22/05 **97**

13) Variedades diferenciáveis (cont.) 97

20 27/05 **102**

13) Variedades diferenciáveis (cont.): espaço tangente e aplicações diferenciáveis entre variedades 102

21 29/05 **107**

14) Valores regulares 107

22 03/06 **110**

15) Formas alternadas 111

23 05/06 **114**

15) Formas alternadas (cont.) 114

16) Formas diferenciais 117

24 10/06 **118**

16) Formas diferenciais (cont.) 118

25 12/06 **122**

16) Formas diferenciais (cont.) 122

17) Derivada exterior 123

26 17/06 **128**

18) Integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$ 128

27 24/06 **134**

19) Integrais de formas diferenciais em cadeias 134

28 26/06 **140**

20) Variedades com bordo 140

21) Integração em variedades (com bordo) 142

29 01/07 **145**

21) Integração em variedades (cont.) 145

22) Green, Gauss, Stokes 147

A Normas em $\mathbb{R}^n$ **150**

Listas de exercícios **158**

Lista 0: revisão de topologia euclidiana **158**

Lista 1: derivadas direcionais e funções de classe C^k **161**

Lista 2: diferencial de uma função **164**

Lista 3: desigualdade do valor médio e fórmulas de Taylor **167**

Lista 4: pontos críticos e otimização **171**

Lista 5: aplicações diferenciáveis e regra da cadeia **173**

Lista 6: difeomorfismos, formas locais, teorema da função implícita **177**

Lista 7: variedades diferenciáveis **183**

Lista 8: formas diferenciais e integração **187**

Provas **193**

Prova 1 (15/04/2025) **193**

Prova 2 (03/07/2025) **199**

Introdução

Estas são as notas de aula da disciplina *MA720/MM720 – Análise no* $\mathbb{R}^n$, oferecida no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp no primeiro semestre de 2025, simultaneamente para alunos de graduação (MA720) e de mestrado (MM720). O curso teve 29 aulas, de 27 de fevereiro a 1º de julho de 2025; cada seção destas notas corresponde a uma aula e tem como título a sua data.

Conteúdo. "Análise no $\mathbb{R}^n$" é uma versão mais aprofundada e rigorosa do cálculo diferencial e integral em várias variáveis. A ideia que guia toda a primeira metade do curso é a *linearização*: a uma aplicação diferenciável $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e a um ponto $p \in U$ associamos a sua derivada $DF(p)$, uma transformação linear, e procuramos deduzir propriedades de F perto de p a partir de propriedades de $DF(p)$, isto é, usando álgebra linear. O exemplo mais importante desse princípio é o *teorema da função inversa*: se $DF(p)$ é invertível, então F é invertível numa vizinhança de p, com inversa diferenciável. Dele decorrem o teorema da função implícita, as formas locais das imersões e das submersões e o teorema do posto, que são a base da teoria das subvariedades de $\mathbb{R}^n$. A segunda metade do curso trata da *integração*: o objetivo é generalizar a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ para dimensões superiores, integrando *formas diferenciais* sobre variedades (curvas, superfícies e seus análogos de dimensão arbitrária). O resultado central é o *teorema de Stokes*, $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, que generaliza o teorema fundamental do cálculo e contém, como casos particulares, os teoremas clássicos de Green, Gauss e Stokes do cálculo vetorial. O curso se divide, grosso modo, em quatro partes.

(1) *Cálculo diferencial de funções reais* (aulas de 27/02 a 27/03): derivadas direcionais e parciais, funções de classe C^k e o teorema de Schwarz, a diferencial, a desigualdade do valor médio, fórmulas de Taylor, pontos críticos, otimização e multiplicadores de Lagrange.

(2) *Aplicações diferenciáveis* (aulas de 03/04 a 13/05): derivada e matriz jacobiana, derivadas de ordem superior, regra da cadeia, difeomorfismos e o teorema da função inversa, o teorema da função implícita, a forma local das imersões e das submersões e o teorema do posto constante.

(3) *Subvariedades de* $\mathbb{R}^n$ (aulas de 15/05 a 03/06): variedades diferenciáveis, cartas e parametrizações locais, espaço tangente, aplicações diferenciáveis entre variedades, valores regulares e o teorema de Sard.

(4) *Formas diferenciais e integração* (aulas de 03/06 a 01/07): formas alternadas e produto exterior, formas diferenciais em variedades, orientação, derivada exterior, integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$ e mudança de

variáveis, integração de formas em cadeias e em variedades com bordo, e o teorema de Stokes, com os casos clássicos de Green, Gauss e Stokes.

A primeira aula (27/02) é uma visão panorâmica e informal do curso.

Pré-requisitos. Formalmente, os pré-requisitos da disciplina na Unicamp são MA211 (Cálculo II), MA502 (Análise I) e MA327 (Álgebra Linear). Atenção: o curso usa também algumas noções de *álgebra multilinear*, que em geral não fazem parte de MA327, como aplicações multilineares e formas alternadas (produto exterior). Elas aparecem nas derivadas de ordem superior (aula de 03/04) e, sobretudo, nas formas diferenciais (a partir da aula de 03/06); o essencial é apresentado nas próprias aulas, mas vale a pena dedicar algum tempo extra a esse material (veja, por exemplo, a seção "Algebraic preliminaries" do capítulo 4 de [2]). Na prática, o curso pressupõe também alguma familiaridade com a topologia de $\mathbb{R}^n$ (conjuntos abertos, fechados, compactos e conexos, sequências, continuidade). Muitos desses conceitos são revisados ao longo do curso; mas, se você sentir que precisa reforçar esse ponto, consulte os primeiros capítulos de [1] ou de [2] e, sobretudo, trabalhe na Lista 0, que é dedicada justamente a uma revisão de topologia euclidiana.

Aulas de exercícios. Além das aulas teóricas, o curso contou com aulas semanais de exercícios, ministradas por André Rasera, PED da disciplina. Os exercícios das listas são parte fundamental do curso: muitos resultados e exemplos importantes aparecem apenas neles, e é resolvendo-os que se aprende de fato a matéria.

Após as notas de aula há um apêndice sobre normas em $\mathbb{R}^n$, escrito por André Rasera. Ao final, incluímos as listas de exercícios (Listas 0 a 8) e as duas provas, com os respectivos gabaritos.

Ementa oficial. Segundo o catálogo da Unicamp, a ementa da disciplina MA720 é:

> Cálculo de várias variáveis: aplicações diferenciáveis, diferencial e matriz jacobiana, desigualdade do valor médio, regra da cadeia, derivadas de ordem superior, fórmula de Taylor, teorema da função inversa e implícita, forma local das imersões e submersões e o teorema do posto. Subvariedades de $\mathbb{R}^n$: valores e pontos regulares, espaço tangente, parametrizações locais. Integração, integrais de linha e de superfícies, formas diferenciais e integração sobre variedades, teorema de Stokes (Green e Gauss).

Bibliografia. As aulas se basearam principalmente em [1] e [2]; algumas partes usaram também [3] e [4], e a parte de integração usou também [5].

[1] E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 2. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.

[2] M. Spivak, *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. W. A. Benjamin, Nova York, 1965.

[3] G. B. Folland, *Advanced Calculus*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.

[4] W. Fleming, *Functions of Several Variables*, 2ª ed. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Nova York, 1977.

[5] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis II*. Universitext, Springer, Berlim, 2004.

Sobre estas notas. Estas são *notas de aula*: elas reproduzem o que foi feito em sala, e por isso o estilo é casual e informal, com demonstrações às vezes apenas esboçadas e detalhes deixados como exercício. Elas não pretendem ser tão completas nem tão cuidadosas quanto um livro-texto; para isso, recomendamos a bibliografia acima.

Atenção: estas notas foram digitalizadas com o auxílio de inteligência artificial a partir do manuscrito usado em sala de aula (as primeiras aulas foram inicialmente digitadas por Izabella Calais), e **não foram revisadas cuidadosamente** pelo autor. Elas certamente contêm erros, tanto de transcrição quanto matemáticos, e devem ser lidas com cautela. Correções e sugestões são bem-vindas.

Notas de aula

1 27/02

0) Introdução

"Análise no $\mathbb{R}^n$" é uma versão mais aprofundada do cálculo em várias variáveis. Este curso corresponde ao que também é chamado de "cálculo avançado".

Nosso objeto de estudo serão as *aplicações*[1] *diferenciáveis* (o que isto quer dizer exatamente será discutido ao longo do curso)

$$F\colon X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

o que equivale a dar m funções reais de n variáveis reais:

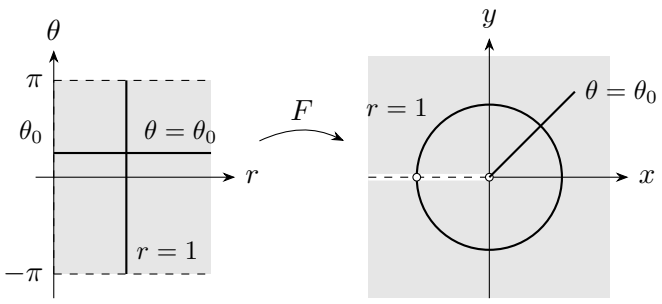
$$\begin{cases} y_1 = F_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \quad \vdots \\ y_m = F_m(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Exemplo 1.1 (Mudança de coordenadas)**.** Seja

$$X = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ -\pi < \theta < \pi\}$$

e considere

$$F\colon X \to \mathbb{R}^2, \qquad (r, \theta) \mapsto (\underbrace{r\cos\theta}_{F_1}, \underbrace{r\operatorname{sen}\theta}_{F_2}).$$

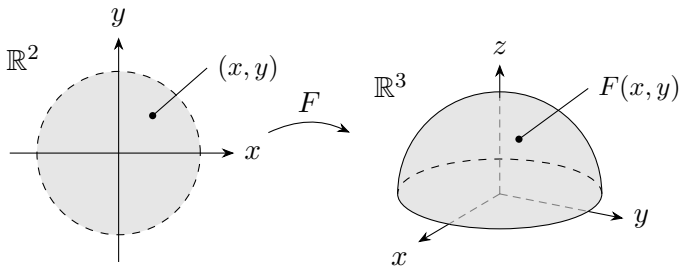


Exemplo 1.2 (Parametrização local)**.** Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e considere

$$F\colon X \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

A imagem de F é o hemisfério norte da esfera unitária.

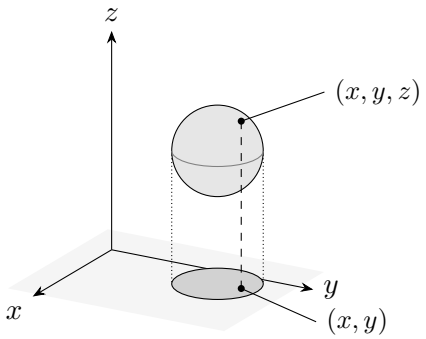
[1] Isto é, funções a valores vetoriais.



Exemplo 1.3 (Projeção)**.** A aplicação

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

projeta uma figura do espaço na sua "sombra" no plano xy.



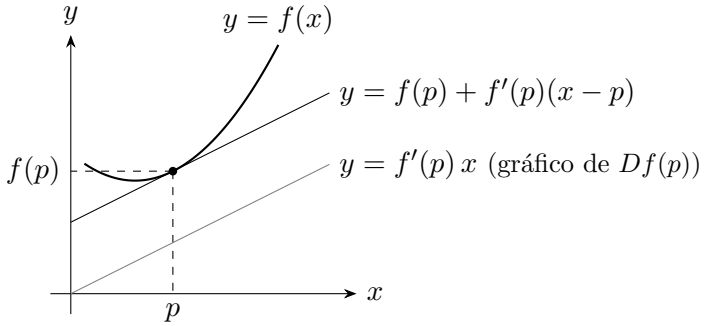
Linearização. A uma aplicação $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ e a um ponto $p \in X$ associaremos uma transformação linear

$$DF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

a *derivada* de F em p, tal que a função $x \mapsto F(p) + DF(p)(x-p)$ é a melhor aproximação afim de F perto de p.

Exemplo 1.4. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em p, então

$$Df(p)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto f'(p)v.$$



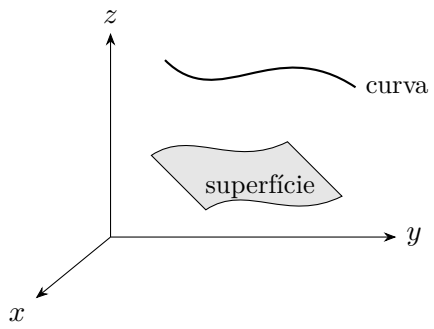
Em geral, $DF(p)$ é representada pela *matriz jacobiana*, cujas entradas são as derivadas parciais das funções componentes:

$$JF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.$$

A "filosofia do cálculo diferencial" é deduzir propriedades de F na vizinhança de p a partir de sua linearização $DF(p)$.

Teorema 1.5 (Função inversa)**.** *Se $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (isto é, continuamente diferenciável) e $DF(p)$ é invertível (isto é, $\det JF(p) \neq 0$), então "F é invertível em uma vizinhança de p".*

Ou seja, F é uma "mudança de variáveis" perto de p. Deste teorema decorrem o teorema da função implícita, a forma local das imersões e submersões, etc., e, a partir daí, a teoria das subvariedades de $\mathbb{R}^n$ (curvas, superfícies, etc.).



Integral. Já em uma variável existem três noções de integral:

indefinida	**definida**	
"primitiva"	"com sinal"	"sem sinal"
$\int f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_{[a,b]} f(x)\,dx$

A integral "sem sinal" é a que aparece na teoria da medida.

Nosso objetivo é generalizar a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ para dimensões superiores. Dados

$$\begin{cases} \omega & \text{uma } k\text{-forma diferencial (o integrando),} \\ M & \text{uma } k\text{-variedade (ou } k\text{-cadeia) orientada (o domínio de integração),} \end{cases}$$

definiremos a integral

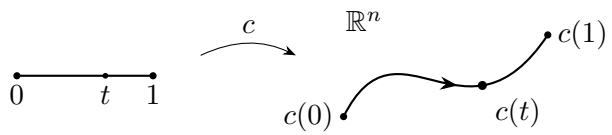
$$\int_M \omega \in \mathbb{R}.$$

Esta noção generaliza as integrais de linha e de superfície e as integrais múltiplas.

Exemplo 1.6. Uma 1-forma em $\mathbb{R}^n$ é uma expressão

$$\omega = f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n.$$

Dado um caminho (curva parametrizada) $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$,



obtemos a integral de linha

$$\begin{aligned}\int_c \omega &= \int_0^1 f_1(c(t))\,d(c_1(t)) + \cdots + f_n(c(t))\,d(c_n(t)) \\ &= \int_0^1 \big(f_1(c(t))c_1'(t) + \cdots + f_n(c(t))c_n'(t)\big)\,dt.\end{aligned}$$

Exemplo 1.7. Uma 2-forma em $\mathbb{R}^3$ (nas variáveis x, y, z) é uma expressão

$$\omega = f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge dz,$$

cuja integral corresponde à integral de superfície.

Cálculo de formas diferenciais. Dadas formas ω, η, temos o *produto exterior* (ou produto "wedge") $\omega \wedge \eta$, que não é comutativo. Dada uma forma ω, temos a sua *derivada exterior* $d\omega$.

Exemplo 1.8. Em $\mathbb{R}^2$,

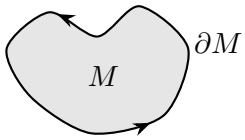
$$\begin{aligned}d(f\,dx + g\,dy) &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\Big) \wedge dx + \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy\Big) \wedge dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{dy \wedge dx}_{=-dx\wedge dy} + \frac{\partial g}{\partial x}\,dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y}\underbrace{dy \wedge dy}_{=0} \\ &= \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Teorema 1.9 (Stokes em $\mathbb{R}^n$)**.**

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

onde ω é uma $(k-1)$-forma diferencial (de classe C^1), M é uma k-variedade compacta e orientada, com bordo, e ∂M é o bordo de M, com a orientação induzida.

Exemplo 1.10. Em $\mathbb{R}^2$, com $k = 2$, tome $\omega = f\,dx + g\,dy$ e M uma região do plano:



Pelo teorema de Stokes e pela conta do exemplo anterior,

$$\int_{\partial M} f\,dx + g\,dy = \int_M \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx \wedge dy,$$

que é o teorema de Green.

2 06/03

Nosso objetivo agora é generalizar a derivada para funções de várias variáveis.

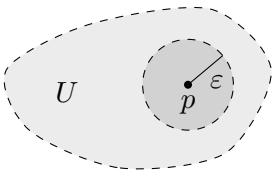
Notação. A norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \ \rightsquigarrow \ \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

1) Derivadas direcionais

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um *aberto*[2], isto é, para todo $p \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|x - p\| < \varepsilon \implies x \in U.$$

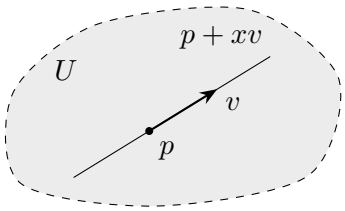


Seja $f\colon U \to \mathbb{R}$ uma função e $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor.

Definição 2.1. Dado $p \in U$, a *derivada direcional* de f em p na direção de v é o limite (quando existir)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h}.$$

Isto é, $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é a derivada da função *de uma variável* $x \mapsto f(p + xv)$ em $x = 0$.



Observação. Atenção: a derivada direcional depende também de $\|v\|$, e não apenas da direção de v!

[2] A letra U vem do alemão *Umgebung* (vizinhança).

Forma equivalente da definição.

$$f(p+hv) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p)\, h + o(h), \qquad h \to 0.$$

Aqui usamos a notação de Bachmann–Landau[3]: escrevemos $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to a$ se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Assim, a equação acima diz que, "perto de $h = 0$, $h \mapsto f(p+hv)$ é aproximada por $h \mapsto f(p) + \frac{\partial f}{\partial v}(p)h$".

Observação (Importante). Se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(p+hv) = f(p) + \alpha h + o(h), \qquad h \to 0,$$

então necessariamente $\alpha = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$.

Exemplo 2.2. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Quanto vale $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$, para v e p quaisquer? Usando o produto interno $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$, temos

$$f(p+hv) = \langle p+hv, p+hv\rangle = \underbrace{\|p\|^2}_{f(p)} + 2\langle p, v\rangle\, h + \underbrace{h^2\|v\|^2}_{o(h)},$$

e portanto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = 2\langle p, v\rangle = 2(p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n).$$

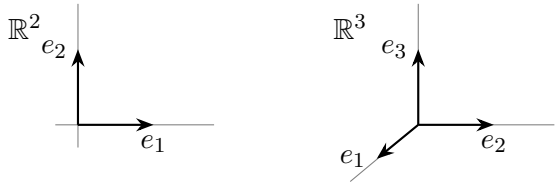
Exercício 2.3. Mostre que, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Se $v, w \in \mathbb{R}^n$, vale em geral que

$$\frac{\partial f}{\partial(v+w)}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial w}(p)\,?$$

A *base canônica* de $\mathbb{R}^n$ é denotada por $e_1, \ldots, e_n$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, etc.



[3]O "o" vem do alemão *Ordnung* (ordem).

Definição 2.4. A *i-ésima derivada parcial* de f em p é

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial f}{\partial e_i}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p_1, \ldots, p_i + h, \ldots, p_n) - f(p)}{h}.$$

Aqui estamos pensando em f como uma função nas "variáveis $x_1, \ldots, x_n$".

Observação 2.5.

- Outras notações:

$$f_{x_i}(p), \quad \partial_i f(p), \quad \partial_{x_i} f(p), \quad D_i f(p), \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f, \quad \ldots$$

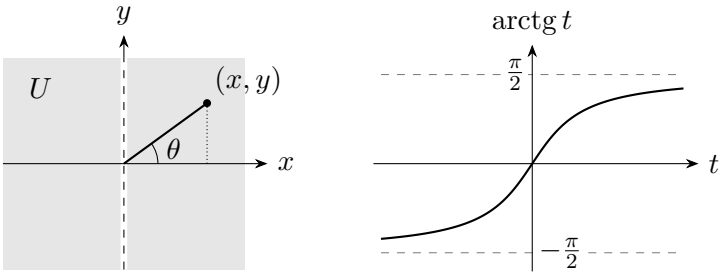
  (a primeira é comum em EDP).

- Em $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) usamos as variáveis x, y (resp. x, y, z), e as derivadas parciais se escrevem

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Exemplo 2.6. Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ e

$$\theta \colon U \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \operatorname{arctg}(y/x).$$



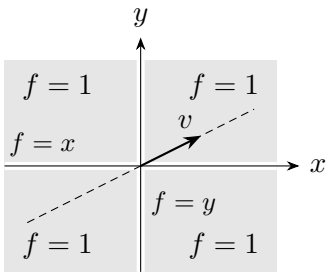
Então

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

A existência de todas as derivadas parciais *não* implica a existência de derivadas direcionais em todas as direções.

Exemplo 2.7. Seja

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y, & x = 0 \text{ ou } y = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 1.$$

Mas, se $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ não é proporcional a e_1 ou e_2, então

$$\frac{f(hv) - f(0)}{h} = \frac{1}{h},$$

que *não* tem limite quando $h \to 0$!

Note que a função f acima não é contínua em 0 (mas é "diferenciável" nas direções horizontal e vertical).

Mesmo a existência de $\frac{\partial f}{\partial v}$ em *todas* as direções v *não* implica continuidade!

Exemplo 2.8. Seja

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Como $f(y^2, y) = \dfrac{y^4}{2y^4} \equiv \dfrac{1}{2}$ (para $y \neq 0$), f *não* é contínua em $(x,y) = 0$. Mas, se $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(hv) - f(0)}{h} = \frac{h^3 v_1 v_2^2}{h \cdot h^2 (v_1^2 + h^2 v_2^4)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4}$$

(e $f(hv) = 0$ se $v_1 = 0$), de modo que

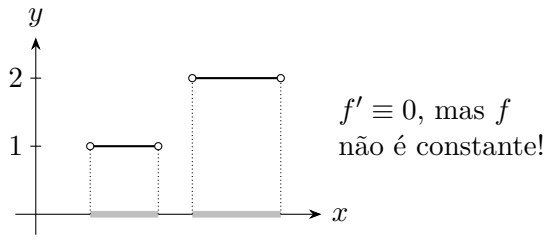
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \begin{cases} 0, & v_1 = 0, \\ v_2^2/v_1, & v_1 \neq 0. \end{cases}$$

Em particular, $\frac{\partial f}{\partial v}(0)$ existe para todo v.

Exercício 2.9. Mostre que a existência de derivadas parciais *limitadas* de $f\colon U \to \mathbb{R}$ (U aberto) em todo ponto de U implica que f é contínua em U.

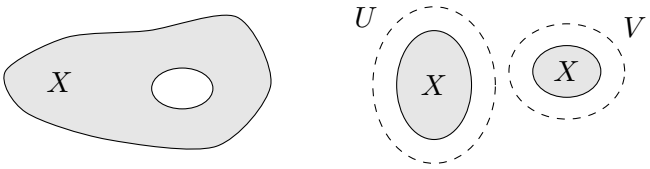
Em uma variável: se $f\colon I \to \mathbb{R}$, com I um intervalo aberto, é tal que $f'(x) \equiv 0$ em I, então f é constante. Qual é o análogo em várias variáveis?

Observação 2.10. É importante que I seja um intervalo (conexo):



Definição 2.11. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é *conexo* se *não* existem abertos *disjuntos* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que

$$X \cap U \neq \emptyset, \quad X \cap V \neq \emptyset \quad \text{e} \quad X \subseteq U \cup V.$$

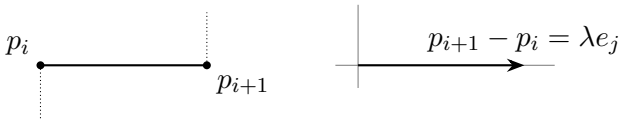


conexo desconexo

Lema 2.12. *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo e $p, q \in U$, então existe um caminho poligonal em U com vértices*

$$p = p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_k = q$$

tal que, para todo $i = 0, \ldots, k-1$, $p_{i+1} - p_i$ é colinear a algum e_j.

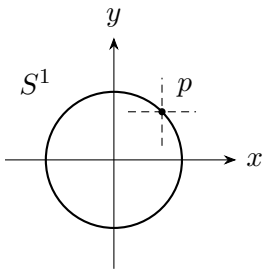


Demonstração. Exercício! □

Observação 2.13. A hipótese "aberto" é importante: o círculo

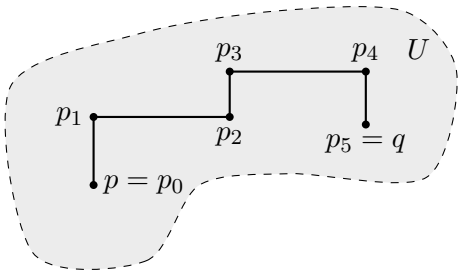
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

é conexo, mas não vale a conclusão do lema!



Proposição 2.14. *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo e $f\colon U \to \mathbb{R}$ é tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ em U para todo $i = 1, \ldots, n$, então f é constante.*

Demonstração. Fixe $p \in U$. Queremos mostrar que $f(q) = f(p)$ para todo $q \in U$. Considere um caminho poligonal de p a q como no lema.



Por indução, basta mostrar que $f(p_{i+1}) = f(p_i)$ para todo $i = 0, \ldots, k-1$.

Seja $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $p_{i+1} = p_i + \lambda e_j$. Aplicando o teorema do valor médio (TVM) à função $\varphi(t) = f(p_i + te_j)$, definida em $[0, \lambda]$ (ou $[\lambda, 0]$), obtemos

$$f(p_{i+1}) - f(p_i) = \varphi(\lambda) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)\lambda$$

para algum θ entre 0 e λ. Mas

$$\varphi'(\theta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_i + (\theta + h)e_j) - f(p_i + \theta e_j)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_i + \theta e_j) = 0.$$

Logo, $f(p_{i+1}) = f(p_i)$. □

3 11/03

Aula passada. Derivadas direcionais e parciais: dados $f\colon U \to \mathbb{R}$ e $p \in U$, definimos $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

2) Funções de classe C^k

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$. Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ existe em todo $p \in U$, obtemos uma função

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathbb{R}$$

e podemos considerar a "derivada de segunda ordem":

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(p) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}(p) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Em geral, uma "derivada de ordem m" é

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\Big(\cdots\Big(\frac{\partial f}{\partial x_{i_m}}\Big)\cdots\Big)\Big).$$

Observação. Atenção: em geral, a ordem importa!

Convenção: a "derivada de ordem 0" é a própria função.

Definição 3.1. Dado $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, dizemos que $f\colon U \to \mathbb{R}$ é *de classe* C^k se, para todo $m \leqslant k$, todas as derivadas parciais de ordem m de f existem e são contínuas em U. Dizemos que f é *de classe* C^∞, ou *suave*, se f é de classe C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 3.2.

- C^0: função contínua.
- C^1: função *continuamente diferenciável*.

Notação. Para $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto,

$$C^k(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R} : f \text{ de classe } C^k\}.$$

Exemplo 3.3. Funções polinomiais são de classe C^∞:

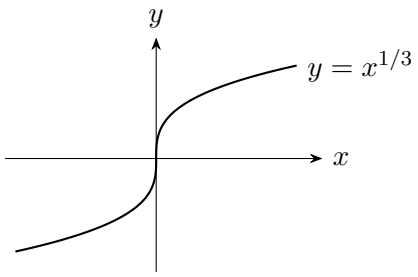
$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{|\alpha| \leqslant d} c_\alpha x^\alpha,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ é um "multi-índice", $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Exemplo 3.4. $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞. Para $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \mapsto x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.$$

Exemplo 3.5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{1/3}$, é de classe C^0, mas não de classe C^1: não é diferenciável em $x = 0$!



Exercício 3.6.

- Mostre que $C^k(U)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra comutativa (com a soma e o produto usuais de funções) e que, se $f \in C^k(U)$ não se anula em nenhum ponto de U, então $\frac{1}{f} \in C^k(U)$.
- Mostre que temos inclusões estritas

$$C^0(U) \supsetneq C^1(U) \supsetneq C^2(U) \supsetneq \cdots \supsetneq C^\infty(U).$$

Exemplo 3.7 (Exercício)**.** Seja

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

- f é C^∞ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- A derivada parcial em x é

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0, \end{cases}$$

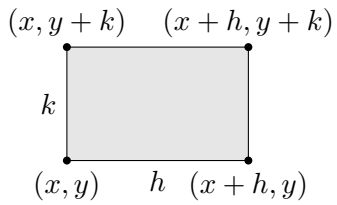
  e analogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}$; ambas são contínuas em 0.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = -\dfrac{h^5}{h^4} = -h$, logo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \cdots = 1 \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$!

Teorema 3.8 (Schwarz)**.** *Se $f \in C^2(U)$, então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Faremos o caso $n = 2$. Tome $p = (x, y) \in U$ e $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que o retângulo de vértices (x, y), $(x + h, y)$, $(x, y + k)$, $(x + h, y + k)$ esteja contido em U.



Seja

$$S = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y).$$

Se $\varphi(t) = f(t, y + k) - f(t, y)$, então

$$S = \varphi(x + h) - \varphi(x).$$

Pelo TVM (x, y, h, k fixos!),

$$\begin{aligned} S &= \varphi'(x + \theta h)h, \qquad 0 < \theta < 1 \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y)\Big)h. \end{aligned}$$

Pelo TVM de novo:

$$S = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x + \theta h, y + \theta' k)\, kh, \qquad 0 < \theta, \theta' < 1.$$

Repetindo o mesmo argumento com a função $\psi(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$, obtemos

$$S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + \rho h, y + \rho' k)\, hk, \qquad 0 < \rho, \rho' < 1.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x + \theta h, y + \theta' k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + \rho h, y + \rho' k).$$

Como as derivadas de ordem 2 de f são contínuas, concluímos a demonstração fazendo $h, k \to 0$. □

Segue por indução (exercício!) que, se $f \in C^k(U)$ com $k \geqslant 2$, então a ordem em que são tomadas as derivadas de ordem $\leqslant k$ não importa!

Notação. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

(α_i derivadas parciais com relação a x_i).

3) Diferencial de uma função

Em uma variável:

f diferenciável em $p \iff$ existe uma *reta tangente* ao gráfico de f em p,

e a reta tangente é o gráfico da função afim que melhor aproxima f em p. A derivada $f'(p)$ é unicamente determinada por

$$f(p+h) = \underbrace{f(p) + f'(p)h}_{\text{função afim em } h} + o(h).$$

Lembrete. Um *funcional linear* em $\mathbb{R}^n$ é uma função da forma

$$\ell \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \ell v = \ell_1 v_1 + \cdots + \ell_n v_n$$

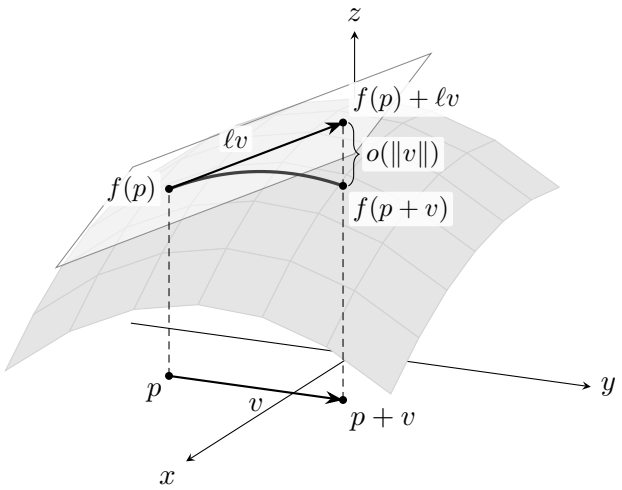
(com $\ell_i = \ell e_i \in \mathbb{R}$).

Definição 3.9. Dizemos que $f \colon U \to \mathbb{R}$ (U aberto em $\mathbb{R}^n$) é *diferenciável* em $p \in U$ se existe um funcional linear $\ell \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(p+v) = f(p) + \ell v + o(\|v\|), \qquad v \to 0,$$

onde $\|v\|$ é a norma de v.

Aqui, "v está variando, se aproximando do vetor nulo".



Lema 3.10. *Se f é diferenciável em p, então, para todo $v \in \mathbb{R}^n$,*

$$\ell v = \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Em particular, $\ell_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Demonstração. Fixe v e considere hv, com $h \to 0$, na definição de diferenciabilidade:

$$\begin{aligned} f(p+hv) &= f(p) + \ell(hv) + o(h\|v\|) \\ &= f(p) + (\ell v)\cdot h + o(h). \end{aligned}$$

Pela definição da derivada direcional (e pela observação de que o coeficiente de h numa tal expansão é único), segue que $\ell v = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$. □

Definição 3.11. Se f é diferenciável em p, a *diferencial* de f em p é o funcional linear

$$df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i.$$

É esta a generalização da derivada!

Com esta notação:

$$f(p+v) = f(p) + df(p)v + o(\|v\|), \qquad v \to 0.$$

4 13/03

Aula passada. Vimos as funções de classe C^k e a noção de diferenciabilidade: $f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em p se

$$f(p+v) = f(p) + df(p)v + o(\|v\|), \qquad v \to 0,$$

onde

$$df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i$$

é um funcional linear! (A última igualdade vale quando f é diferenciável.)

3) Diferencial de uma função (cont.)

Exemplo 4.1. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Temos

$$\begin{aligned} f(p+v) &= \langle p+v, p+v\rangle \\ &= \|p\|^2 + 2\langle p, v\rangle + \underbrace{\|v\|^2}_{o(\|v\|)}, \qquad v \to 0, \end{aligned}$$

e $v \mapsto 2\langle p, v\rangle$ é um funcional linear! Logo f é diferenciável em p e

$$\begin{aligned} df(p)v = 2\langle p, v\rangle &= 2p_1v_1 + \cdots + 2p_nv_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\, v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\, v_n. \end{aligned}$$

Proposição 4.2. *Se $f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em p, então f é contínua em p.*

Demonstração. Quando $v \to 0$,

$$\begin{aligned} f(p+v) &= f(p) + \underbrace{df(p)v}_{o(1)} + \underbrace{o(\|v\|)}_{o(1)} \\ &= f(p) + o(1). \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.3. Considere

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

A função f é contínua em 0, pois $f(0) = 0$ e

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\, y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{\|(x,y)\| \cdot \|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\|.$$

Será que f é diferenciável em 0? Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0.$$

Neste caso, f é diferenciável em 0 se, e somente se, $f(v) = o(\|v\|)$ quando $v \to 0$. Mas, tomando $v = (h, h)$,

$$f(v) = \frac{h^3}{2h^2} = \frac{h}{2} \neq o(|h|).$$

Logo f não é diferenciável em 0.

Observação 4.4. Outra maneira de ver isso: dado $v = (v_1, v_2) \neq 0$,

$$f(hv) = \frac{hv_1(hv_2)^2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = h\,\frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial v}(0) = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Assim, $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0)$ não é linear! Portanto f não é diferenciável em 0.

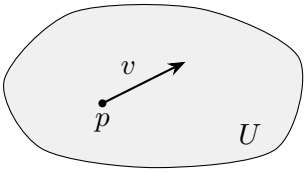
Exercício 4.5. Estude a diferenciabilidade de

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

A existência de derivadas direcionais não garante diferenciabilidade, mas:

Teorema 4.6. *Se $f\colon U \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, então f é diferenciável em (todo ponto de) U.*

Demonstração. Sejam $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeno.



Queremos mostrar que

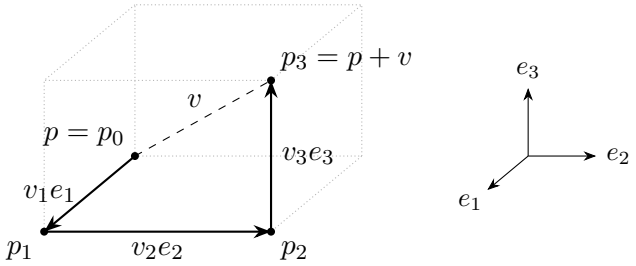
$$f(p+v) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i + o(\|v\|), \qquad v \to 0.$$

Considere os pontos

$$p_0 = p, \quad p_1 = p + v_1 e_1, \quad p_2 = p + v_1 e_1 + v_2 e_2, \quad \ldots, \quad p_n = p + v,$$

de forma que

$$f(p+v) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(p_i) - f(p_{i-1})\big).$$



Aplicando o teorema do valor médio (TVM) a $\varphi_i(t) = f(p_{i-1} + te_i)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(p_i) - f(p_{i-1}) &= \varphi_i(v_i) - \varphi_i(0) \\ &= \varphi_i'(\theta_i)\, v_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i)\, v_i \end{aligned}$$

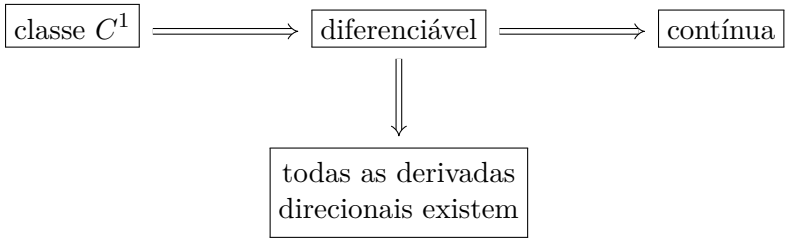
para algum θ_i entre 0 e v_i. Logo,

$$\begin{aligned} f(p+v) - f(p) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i)\, v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) v_i}_{(*)}. \end{aligned}$$

O termo $(*)$ é $o(\|v\|)$ quando $v \to 0$, pois:

- $\dfrac{v_i}{\|v\|}$ é limitado;
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_{i-1} + \theta_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \to 0$ (continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$!). □

Temos, portanto, o seguinte diagrama de implicações:



Exemplo 4.7. A função

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0, \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois é de classe C^1 (Exercício 14 da Lista 1; ver o exemplo da aula de 11/03).

Exemplo 4.8. Toda função polinomial é diferenciável (pois é de classe C^∞).

Exemplo 4.9. Seja $x_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$ (projeção na i-ésima coordenada). A função x_i é diferenciável (pois é C^∞) e

$$dx_i(p)v = v_i,$$

já que

$$\underbrace{p_i + v_i}_{x_i(p+v)} = \underbrace{p_i}_{x_i(p)} + v_i + \underbrace{0}_{o(\|v\|)}.$$

Em particular,

$$dx_i(p)e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Isto é, $dx_1(p), \ldots, dx_n(p)$ é a base de $(\mathbb{R}^n)^*$ dual a $e_1, \ldots, e_n$.

Segue do exemplo que, se f é diferenciável em p, então

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\, dx_1(p) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\, dx_n(p).$$

Se f é diferenciável em (todo ponto de) U, escrevemos simplesmente

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$$

(identidade de aplicações $U \to (\mathbb{R}^n)^*$). Intuitivamente, se $y = f(x)$,

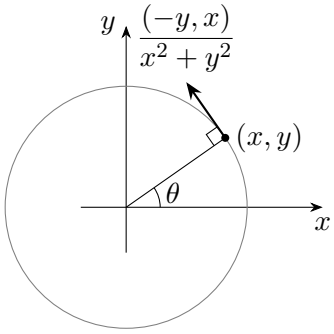
- dx_i = incremento infinitesimal na "variável independente" x_i;
- $dy = df$ = incremento infinitesimal na "variável dependente" y.

Exemplo 4.10. Seja $\theta(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$, definida em $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Então

$$d\theta = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

(o "elemento de ângulo"). Podemos escrever

$$d\theta = \Big\langle \underbrace{\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big)}_{\text{vetor ortogonal a } (x,y)}, \quad \underbrace{(dx, dy)}_{\substack{\text{variação infinitesimal} \\ \text{em } (x,y)}} \Big\rangle.$$



Exercício 4.11. Mostre que, se $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis, então $f+g$, $f \cdot g$ e f/g (se g nunca se anula) são diferenciáveis e valem

$$d(f+g) = df + dg, \qquad d(fg) = f\,dg + g\,df, \qquad d(f/g) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$$

Definição 4.12. O *gradiente* de uma função diferenciável no ponto p é o vetor

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

A relação entre gradiente e diferencial é

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = df(p)v = \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Seja $u \in \mathbb{R}^n$ unitário ($\|u\| = 1$). Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(p)\right| \leqslant \|\nabla f(p)\|,$$

e vale a igualdade se, e somente se, u é colinear a $\nabla f(p)$ (supondo $\nabla f(p) \neq 0$!). Assim,

$$u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \quad \text{maximiza} \quad u \longmapsto \frac{\partial f}{\partial u}(p).$$

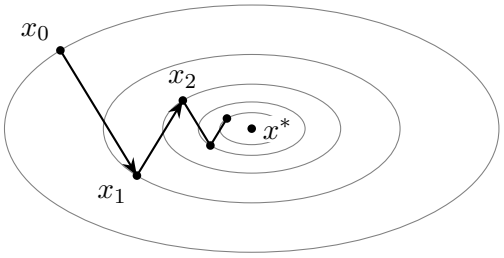
Em palavras: "$\nabla f(p)$ aponta na direção de maior crescimento de f em p, e a norma $\|\nabla f(p)\|$ é a taxa de crescimento nesta direção".

Observação 4.13. O vetor $-\nabla f(p)$ aponta na direção de maior *decrescimento*.

Método do gradiente ("gradient descent"). O objetivo é minimizar uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

- escolhemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
- definimos $x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k)$, onde $\gamma_k > 0$ é o "passo".

Assim, espera-se que $f(x_0) \geqslant f(x_1) \geqslant \cdots$ e que x_k se aproxime de um ponto de mínimo x^* de f.



O método do gradiente (e suas variantes, como o método do gradiente estocástico) é uma ferramenta de otimização essencial em aprendizado de máquina e inteligência artificial: é com ele que se "treinam" as redes neurais, minimizando uma função de custo que depende de um número enorme de parâmetros. Para saber mais, veja por exemplo os livros-texto

- S. Boyd e L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004 (cap. 9);
- I. Goodfellow, Y. Bengio e A. Courville, *Deep Learning*, MIT Press, 2016 (cap. 4 e 8).

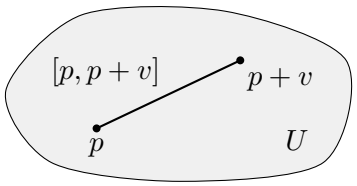
Exercício 4.14. Mostre que, se $f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $p \in U$ é um extremo local de f, então $\nabla f(p) = 0$.

5 18/03

4) Desigualdade do valor médio

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$. Dados $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$, suponha que

$$[p, p+v] = \{p + tv : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subseteq U.$$



Lema 5.1. *Seja $\varphi(t) = f(p+tv)$. Para todo $t \in (0,1)$ tal que f é diferenciável em $p+tv$, vale*

$$\varphi'(t) = df(p+tv)v = \frac{\partial f}{\partial v}(p+tv) \quad (= \langle \nabla f(p+tv), v\rangle).$$

Demonstração. Quando $h \to 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(t+h) &= f(p+tv+hv) \\ &= f(p+tv) + df(p+tv)(hv) + o(\|hv\|) \\ &= \underbrace{f(p+tv)}_{\varphi(t)} + \underbrace{df(p+tv)v}_{\varphi'(t)} h + o(h). \end{aligned}$$

□

Observação 5.2.

- Já sabíamos disso: considere $\psi(s) = \varphi(s+t) = f(q+sv)$, onde $q = p+tv$; então $\psi'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(q) = df(q)v$.
- Este é um caso particular da "regra da cadeia", que veremos mais à frente.

Teorema 5.3 (Valor médio)**.** *Se f é contínua em $[p, p+v]$ (segmento fechado) e diferenciável em $(p, p+v)$ (segmento aberto), então existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(p+v) - f(p) = df(p+\theta v)v = \frac{\partial f}{\partial v}(p+\theta v) \quad (= \langle \nabla f(p+\theta v), v\rangle).$$

Demonstração. Seja $\varphi(t) = f(p+tv)$. O resultado segue do lema e do TVM em uma variável. □

Se $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, a "norma de operador" de ℓ é

$$\begin{aligned}\|\ell\| &= \sup\{|\ell v| : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\ell v|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}.\end{aligned}$$

Note que $|\ell v| \leqslant \|\ell\|\,\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 5.4. Mostre que, se $w \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\ell v = \langle w, v\rangle$, então $\|w\| = \|\ell\|$, onde $\|w\|$ é a norma euclidiana. (Note que se $\ell v = \ell_1 v_1 + \cdots + \ell_n v_n$, então $w = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$.)

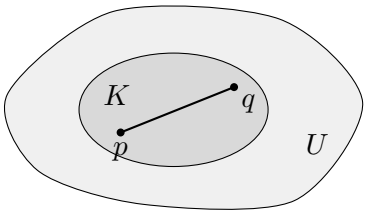
Em particular, se f é diferenciável em p,

$$\|df(p)\| = \|\nabla f(p)\|,$$

onde à esquerda temos a norma de operador e à direita a norma euclidiana.

Corolário 5.5 (Desigualdade do valor médio)**.** *Sejam $K \subseteq U$ um subconjunto* convexo *onde f é diferenciável e $C \geqslant 0$ uma constante tal que $\|df(x)\| \leqslant C$ para todo $x \in K$. Então, para todos $p, q \in K$, vale*

$$|f(q) - f(p)| \leqslant C\|q - p\|.$$



Demonstração. Dados $p, q \in K$, temos $[p, q] \subseteq K$. Pelo TVM (com $v = q - p$),

$$f(q) - f(p) = df\big(p + \theta(q - p)\big)(q - p)$$

para algum $\theta \in (0, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned}|f(q) - f(p)| &\leqslant \big\|df\big(p + \theta(q - p)\big)\big\|\,\|q - p\| \\ &\leqslant C\|q - p\|.\end{aligned}$$

□

Definição 5.6. Uma função $f\colon X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita *de Lipschitz* se existe $C \geqslant 0$ tal que

$$|f(q) - f(p)| \leqslant C\|q - p\| \quad \text{para todos } p, q \in X.$$

A desigualdade do valor médio mostra que f é de Lipschitz em K.

Exercício 5.7. Mostre que, se f é de classe C^1 e K é compacto (além de convexo), a hipótese do corolário é automaticamente satisfeita para alguma constante $C \geqslant 0$.

5) Fórmulas de Taylor

A derivada fornece uma aproximação de primeira ordem; as fórmulas de Taylor fornecem aproximações de ordens maiores:

$$f(p+v) = P_k(v) + r_k(v),$$

onde $P_k(v) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} c_\alpha v^\alpha$ é um polinômio de grau $\leqslant k$ (que depende de f e p) e $r_k(v) = o(\|v\|^k)$ é o *resto*.

Exemplo 5.8.

- Se f é diferenciável,

$$f(p+v) = f(p) + df(p)v + o(\|v\|) = \underbrace{f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i}_{P_1(v)} + \underbrace{o(\|v\|)}_{r_1(v)}.$$

- Se f é duas vezes diferenciável,

$$f(p+v) = \underbrace{f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i v_j}_{P_2(v)} + \underbrace{o(\|v\|^2)}_{r_2(v)}.$$

Definição 5.9. Dado $k \geqslant 2$, uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$ é *k vezes diferenciável* em $p \in U$ se f é diferenciável numa vizinhança de p e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é $k-1$ vezes diferenciável em p, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo 5.10. Se $f \in C^k(U)$, então f é k vezes diferenciável em todo ponto de U.

Exercício 5.11. Mostre que o teorema de Schwarz vale mais geralmente para funções duas vezes diferenciáveis. (Ver Elon.)

Definição 5.12. A *k-ésima diferencial* em p de uma função f k vezes diferenciável em p é a função

$$d^k f(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad v \longmapsto d^k f(p) v^{\otimes k},$$

onde (notação)

$$d^k f(p) v^{\otimes k} := \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(p)\, v_{i_1} \cdots v_{i_k}.$$

Note que $d^k f(p)$ é uma função polinomial homogênea de grau k.

Exemplo 5.13. Em $\mathbb{R}^2$, denotando $v = (h, k)$,

$$\begin{aligned} d^2f(p)v^{\otimes 2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)\, h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)\, kh + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)\, k^2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)\, hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)\, k^2, \end{aligned}$$

que é a forma quadrática em (h, k):

$$\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}}_{\text{matriz simétrica (Schwarz)}} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Mais geralmente:

Definição 5.14. Se f é duas vezes diferenciável em p, a *matriz hessiana* de f em p é

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Note que $Hf(p)$ é a única matriz simétrica (pelo teorema de Schwarz) que representa a forma quadrática $d^2f(p)$:

$$\begin{aligned} d^2f(p)v^{\otimes 2} &= \langle Hf(p)v, v\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p)\, v_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i v_j \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} \partial^\alpha f(p)\, v^\alpha, \end{aligned}$$

onde, na última soma, $\alpha = (0, \ldots, 2, \ldots, 0)$ ou $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Exercício 5.15. Mostre que, se f é k vezes diferenciável em p, então

$$d^kf(p)v^{\otimes k} = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p)\, v^\alpha, \qquad \text{onde } \binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

é o "número de maneiras de separar k objetos em n caixas, com α_i objetos na i-ésima caixa".

6 20/03

Aula passada. Vimos as funções k vezes diferenciáveis e a k-ésima diferencial

$$d^k f(p)v^{\otimes k} = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(p)\, v_{i_1}\cdots v_{i_k} \overset{\text{exercício}}{=} \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p)\, v^\alpha.$$

5) Fórmulas de Taylor (cont.)

Definição 6.1. Dizemos que f *se anula à ordem* $k+1$ *em* p se

$$f(p) = 0, \quad df(p) = 0, \quad \dots, \quad d^k f(p) = 0$$

(igualdades de funções). Pelo exercício seguinte, isso equivale a ter $\partial^\alpha f(p) = 0$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant k$.

Exercício 6.2. Mostre que, se $f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant d} c_\alpha x^\alpha$ é uma função polinomial que se anula identicamente em uma vizinhança da origem, então $c_\alpha = 0$ para todo α.

Teorema 6.3. *Sejam $k \geqslant 1$ e f uma função k vezes diferenciável em $0 \in \mathbb{R}^n$. Se f se anula à ordem $k+1$ em 0, então*

$$f(v) = o(\|v\|^k), \qquad v \to 0.$$

Demonstração. Por indução em k.

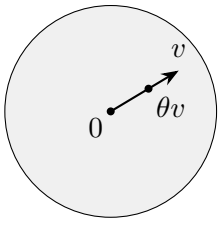
$k = 1$*:* é imediato da definição de diferenciabilidade.

$k \geqslant 2$*:* suponha que o resultado vale até $k-1$. Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é $k-1$ vezes diferenciável e se anula à ordem k em 0,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(v) = o(\|v\|^{k-1}), \qquad v \to 0,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Pelo TVM, para todo v suficientemente pequeno, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(v) = df(\theta v)v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta v)\, v_i.$$



Dividindo por $\|v\|^k$:

$$\frac{f(v)}{\|v\|^k} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\theta v)}{\|v\|^{k-1}}}_{\to 0} \underbrace{\frac{v_i}{\|v\|}}_{\text{limitado}} \longrightarrow 0, \qquad v \to 0. \qquad \square$$

Corolário 6.4 (Fórmula de Taylor infinitesimal)**.** *Se f é k vezes diferenciável em p, então, quando $v \to 0$,*

$$\begin{aligned} f(p+v) &= f(p) + df(p)v + \cdots + \frac{1}{k!} d^k f(p) v^{\otimes k} + o(\|v\|^k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{d^i f(p) v^{\otimes i}}{i!} + o(\|v\|^k). \end{aligned}$$

Demonstração. Basta notar que

$$r_k(v) := f(p+v) - f(p) - df(p)v - \cdots - \frac{1}{k!} d^k f(p) v^{\otimes k}$$

é k vezes diferenciável em 0 e se anula à ordem $k+1$ em 0 (verifique!). $\square$

Observação 6.5. Pelo exercício da aula passada, podemos escrever

$$f(p+v) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} v^\alpha + o(\|v\|^k),$$

ou, com $x = p + v$,

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha + o(\|x-p\|^k).$$

Exemplo 6.6. Qual é a fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 5 de $f(x,y) = x/(1+xy)$ em $(x,y) = 0$?

Poderíamos calcular as derivadas: $f(0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+xy-xy}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1, \quad \dots$$

Mais inteligente:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+xy} &= x \cdot \frac{1}{1-(-xy)} \\ &= x(1 + (-xy) + (-xy)^2 + (-xy)^3 + \cdots), \qquad |xy| < 1 \\ &= \underbrace{x - x^2y + x^3y^2}_{\text{polinômio de grau} \leqslant 5} - x^4y^3 \underbrace{(1 - xy + x^2y^2 - \cdots)}_{\text{limitado}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{x^4y^3}{\|(x,y)\|^5} = \underbrace{\left(\frac{x}{\|(x,y)\|}\right)^4}_{\text{limitado}} \cdot \underbrace{\left(\frac{y}{\|(x,y)\|}\right)}_{\text{limitado}} \cdot \underbrace{y^2}_{\to 0}.$$

Portanto,

$$\boxed{f(x,y) = x - x^2y + x^3y^2 + o(\|(x,y)\|^5).}$$

Exercício 6.7. Use a fórmula de Taylor infinitesimal para mostrar que vale a volta do teorema acima. Conclua a unicidade da fórmula de Taylor infinitesimal: se f é k vezes diferenciável em p e $P_i(v)$ são funções polinomiais homogêneas de grau i em v tais que

$$f(p+v) = P_0(v) + P_1(v) + \cdots + P_k(v) + o(\|v\|^k), \qquad v \to 0,$$

então

$$P_i(v) = \frac{d^i f(p) v^{\otimes i}}{i!} \qquad \text{para todo } i = 0, \ldots, k.$$

Em uma variável, se $\varphi \in C^{k+1}(I)$, onde I é um intervalo aberto contendo a, então, para todo $x \in I$:

- *Fórmula de Taylor com resto de Lagrange:*

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \frac{\varphi^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

  para algum c entre a e x.

- *Fórmula de Taylor com resto integral:*

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \int_a^x \frac{\varphi^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}\,dt.$$

Observação 6.8. Temos $\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)\,dt$. Integrando por partes com $u = \varphi'$, $v = t - x$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(a) + \big[(t-x)\varphi'(t)\big]_a^x - \int_a^x \varphi''(t)(t-x)\,dt \\ &= \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \int_a^x \varphi''(t)(x-t)\,dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes novamente, com $u = \varphi''$, $v = -(x-t)^2/2$, etc.

Corolário 6.9 (Fórmulas de Taylor com resto de Lagrange e resto integral)**.** *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto convexo e $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^{k+1}. Para todo $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeno,*

(i) existe $\theta \in (0,1)$ *tal que*

$$f(p+v) = \sum_{i=0}^{k} \frac{d^i f(p) v^{\otimes i}}{i!} + \frac{d^{k+1} f(p+\theta v) v^{\otimes (k+1)}}{(k+1)!};$$

(ii) vale

$$f(p+v) = \sum_{i=0}^{k} \frac{d^i f(p) v^{\otimes i}}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, d^{k+1} f(p+tv) v^{\otimes (k+1)}\, dt.$$

Demonstração. Basta aplicar as fórmulas de Taylor correspondentes em uma variável à função $\varphi(t) = f(p+tv)$ e notar que

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= df(p+tv)v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tv)\, v_i \qquad \text{(aula passada)},\\
\varphi''(t) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tv) \right)' v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p+tv)\, v_j \right) v_i = d^2 f(p+tv) v^{\otimes 2},\\
&\vdots \\
\varphi^{(i)}(t) &= d^i f(p+tv) v^{\otimes i}.
\end{aligned}$$

□

7 25/03

6) Pontos críticos

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciável.

Definição 7.1. Dizemos que $p \in U$ é um *ponto crítico* de f se $df(p) = 0$ (ou $\nabla f(p) = 0$), isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 7.2. Quais são os pontos críticos de $f(x, y) = x^2+3y^4+4y^3-12y^2$? Temos

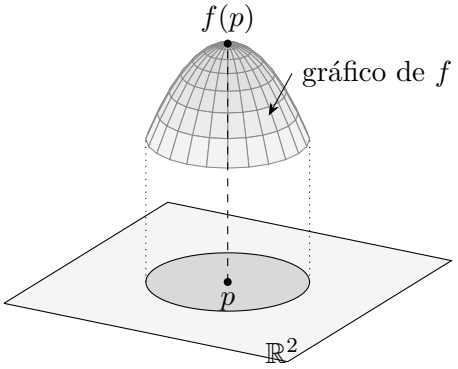
$$df = 2x\,dx + (12y^3 + 12y^2 - 24y)\,dy,$$

logo

$$df = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 12y\underbrace{(y^2 + y - 2)}_{(y-1)(y+2)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y \in \{0, -2, 1\}. \end{cases}$$

Os pontos críticos são $\{(0, 0), (0, -2), (0, 1)\}$.

Definição 7.3. A função f tem um *máximo local* (resp. *mínimo local*) em p se $f(x) \leqslant f(p)$ (resp. $f(x) \geqslant f(p)$) para todo x em uma vizinhança de p. Um máximo ou mínimo local é chamado de *extremo local*.



Proposição 7.4. *Se f tem um extremo local em p, então p é um ponto crítico de f.*

Demonstração. Se p é um extremo local de f, então 0 é um extremo local de

$$\varphi_i(t) = f(p + te_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Logo, $0 = \varphi_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. □

Como determinar se um ponto crítico é um máximo ou mínimo local (ou nenhum dos dois)?

Observação 7.5. Princípio geral: "o comportamento de uma função f na vizinhança de um ponto p é determinado pelo primeiro termo não nulo na expansão de Taylor de $f - f(p)$".

Se $df(p) = 0$, supondo f duas vezes diferenciável, olhamos para a forma quadrática $d^2f(p)$:

$$d^2f(p)v^{\otimes 2} = \langle Hf(p)v, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\, v_i v_j,$$

onde a hessiana

$$Hf(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

é *simétrica.*

Exemplo 7.6. Suponha que $df(p) = 0$ e que

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

é uma matriz diagonal. A fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 2 dá

$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}(\lambda_1 v_1^2 + \cdots + \lambda_n v_n^2) + o(\|v\|^2), \qquad v \to 0.$$

Se todos os $\lambda_i > 0$:

$$f(p+v) = f(p) + (\text{termo positivo}) \quad \Longrightarrow \quad \text{mínimo local em } p.$$

Se todos os $\lambda_i < 0$:

$$f(p+v) = f(p) + (\text{termo negativo}) \quad \Longrightarrow \quad \text{máximo local em } p.$$

("O resto vai para zero mais rápido que $\|v\|^2$, logo é negligenciável perto de $\sum \lambda_i v_i^2$ para v suficientemente pequeno.")

Definição 7.7. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica. Dizemos que A (ou que a forma quadrática $v \mapsto \langle Av, v\rangle$) é:

- *definida positiva* se $\langle Av, v\rangle > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- *definida negativa* se $\langle Av, v\rangle < 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;
- *indefinida* se $\langle Av, v\rangle$ assume valores positivos e valores negativos.

Exemplo 7.8.

- $v \mapsto \|v\|^2$ ($A = I$) é definida positiva.
- Em $\mathbb{R}^4$,

$$(t,x,y,z) \longmapsto t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

  é indefinida (Minkowski).

Observação 7.9. *Teorema espectral:* toda matriz simétrica tem uma base ortonormal de autovetores (em particular, é diagonalizável).

Exercício 7.10. Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ seus autovalores. Mostre que A é definida positiva (resp. negativa) se, e somente se, $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 7.11. *Seja $f\colon U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $p \in U$ e suponha que p é um ponto crítico de f. Se $Hf(p)$ é definida positiva (resp. definida negativa), então p é um mínimo local (resp. máximo local) de f.*

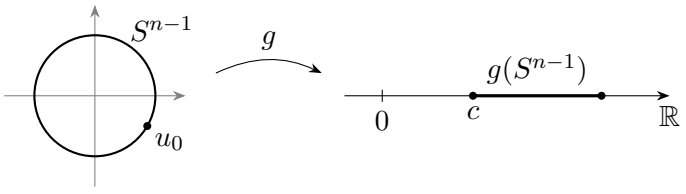
Demonstração. Pela fórmula de Taylor infinitesimal,

$$f(p+v) = f(p) + \frac{1}{2}\langle Hf(p)v, v\rangle + r(v),$$

com $r(v) = o(\|v\|^2)$ quando $v \to 0$.

Se $Hf(p)$ é definida positiva, então existe $c > 0$ tal que $\langle Hf(p)u, u\rangle \geqslant c$ para todo $\|u\| = 1$. De fato:

- $S^{n-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$ é compacto;
- $g\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \langle Hf(p)u, u\rangle$, é contínua; logo atinge um mínimo global $g(u_0) =: c > 0$ (pois $g(u) > 0$ para todo u).



Logo,

$$\frac{f(p+v)-f(p)}{\|v\|^2} = \frac{1}{2}\left\langle Hf(p)\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle + \frac{r(v)}{\|v\|^2}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}c + \frac{r(v)}{\|v\|^2}.$$

Como $r(v) = o(\|v\|^2)$, temos $|r(v)|/\|v\|^2 \leqslant c/4$ para todo v suficientemente pequeno, donde

$$\frac{f(p+v)-f(p)}{\|v\|^2} \geqslant \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = \frac{c}{4} > 0$$

(o que equivale a $f(p+v) > f(p)$ para $v \neq 0$). Isto é, p é um mínimo local.

O outro caso é análogo. □

Exemplo 7.12. Voltemos a $f(x,y) = x^2 + 3y^4 + 4y^3 - 12y^2$, cujos pontos críticos são $(0,0)$, $(0,-2)$ e $(0,1)$. Calculemos a hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(12y^3 + 12y^2 - 24y) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(12y^3 + 12y^2 - 24y) = 36y^2 + 24y - 24.$$

Assim,

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 72 \end{pmatrix}.$$

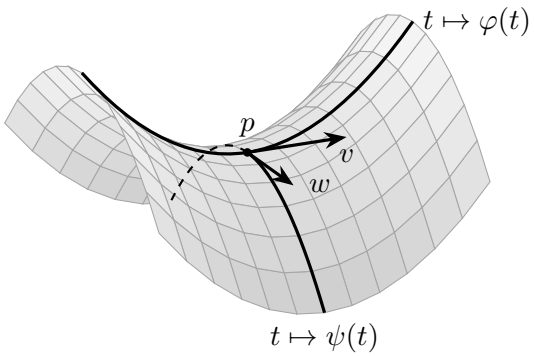
Os autovalores de $Hf(0,1)$ e $Hf(0,-2)$ são positivos, enquanto $Hf(0,0)$ tem autovalores $2 > 0$ e $-24 < 0$. Portanto $(0,-2)$ e $(0,1)$ são mínimos locais e $(0,0)$ é um *ponto de sela*!

Definição 7.13. Um ponto crítico p de f é dito *ponto de sela* se $Hf(p)$ tem pelo menos um autovalor positivo e um negativo.

Note que, se v (resp. w) é um autovetor com autovalor $\lambda > 0$ (resp. $\mu < 0$), então f tem um mínimo (resp. máximo) local na direção de v (resp. w):

$$\varphi(t) = f(p+tv) \Longrightarrow \varphi''(0) = \langle Hf(p)v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle > 0,$$
$$\psi(t) = f(p+tw) \Longrightarrow \psi''(0) = \cdots = \mu \langle w, w\rangle < 0,$$

lembrando que $\varphi''(t) = d^2 f(p+tv)v^{\otimes 2}$.



Definição 7.14. Um ponto crítico p tal que $Hf(p)$ não é invertível (isto é, $\det Hf(p) = 0$, ou ainda, algum dos autovalores de $Hf(p)$ se anula) é dito *degenerado*.

Exercício 7.15. Seja $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Mostre que a origem é um ponto crítico degenerado. Mostre que a restrição de f a qualquer reta pela origem tem mínimo local na origem, mas a origem não é um mínimo local de f! [Dica: considere os conjuntos onde $f > 0$ e $f < 0$.]

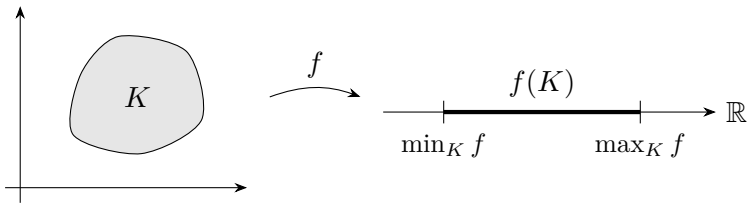
8 27/03

Aula passada. Vimos os pontos críticos de uma função f (isto é, os pontos p com $df(p) = 0$), que todo extremo local é um ponto crítico e o "critério da segunda derivada".

7) Otimização

Como encontrar máximos e mínimos de funções? Começamos relembrando um fato topológico importante.

Teorema 8.1 (Fato topológico importante)**.** *Se $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto (fechado e limitado) e $f\colon K \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo* globais *em K.*

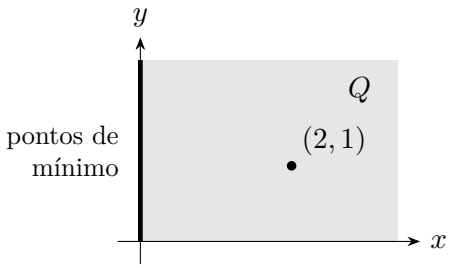


Às vezes é possível aplicá-lo mesmo em domínios não compactos!

Exemplo 8.2. Seja

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2 + 4}.$$

A função f tem máximo ou mínimo em $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0\}$? Note que Q é fechado, mas ilimitado.



- Temos $f(x, y) \geqslant 0$ em Q, e $f(0, y) = 0$. Logo, os pontos de $\{(0, y) : y \geqslant 0\}$ são pontos de mínimo (global) de f em Q.

- Comportamento quando $\|(x,y)\| \to \infty$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f(x,y) &= \frac{x}{x^2+(y-1)^2+4} \\ &\leqslant \frac{\|(x,y-1)\|}{\|(x,y-1)\|^2+4} \leqslant \frac{1}{\|(x,y-1)\|} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

- Logo, f tem um máximo em Q! (Isto segue do fato topológico; a justificativa virá depois.)

O máximo ocorre no interior de Q ou no eixo x ($y = 0$).

- Pontos críticos no interior de Q:

$$df = \frac{1}{(x^2+(y-1)^2+4)^2}\Big(\big(-x^2+(y-1)^2+4\big)\,dx - 2x(y-1)\,dy\Big) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = (y-1)^2+4 \\ x(y-1) = 0 \\ x, y \geqslant 0 \end{cases} \iff (x,y) = (2,1).$$

Temos $f(2,1) = \dfrac{2}{4+4} = \dfrac{1}{4}$.

- Pontos críticos de $\varphi(t) = f(t,0) = \dfrac{t}{t^2+5}$ para $t > 0$:

$$d\varphi = \frac{-t^2+5}{(t^2+5)^2}\,dt = 0 \iff \begin{cases} t^2 = 5 \\ t > 0 \end{cases} \iff t = \sqrt{5}.$$

Temos $f(\sqrt{5},0) = \dfrac{\sqrt{5}}{10} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} < \dfrac{1}{4}$.

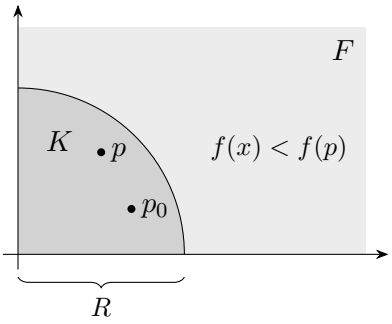
Portanto, o máximo global é $f(2,1) = \frac{1}{4}$.

Lema 8.3. *Seja $F \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado* ilimitado *e $f\colon F \to \mathbb{R}$ contínua.*

(i) Se $f(x) \to \infty$ quando $\|x\| \to \infty$ em F, então f tem mínimo global em F.

(ii) Se $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$ em F e existe $p \in F$ tal que $f(p) > 0$ (resp. $f(p) < 0$), então f tem máximo (resp. mínimo) global em F.

Demonstração. Vamos demonstrar apenas (ii), no caso $f(p) > 0$. Como $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$ em F, existe $R > 0$ tal que, se $\|x\| > R$, então $f(x) < f(p)$.



O conjunto $K := \{x \in F : \|x\| \leqslant R\}$ é compacto (pois é fechado e limitado), logo f tem um máximo em K, digamos $f(p_0)$, para algum $p_0 \in K$. Este é o máximo global em F pois, se $x \in F \setminus K$, então $f(x) < f(p) \leqslant f(p_0)$ (note que $p \in K$ pela definição de R). □

Problemas de otimização com condições ("problems with constraints")

Como minimizar ou maximizar uma função num conjunto da forma

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \ ?$$

Definição 8.4. Se g é de classe C^k ($k \geqslant 1$) e $dg(p) \neq 0$ para todo $p \in H$, dizemos que H é a *hipersuperfície de classe* C^k definida pela equação $g = 0$.

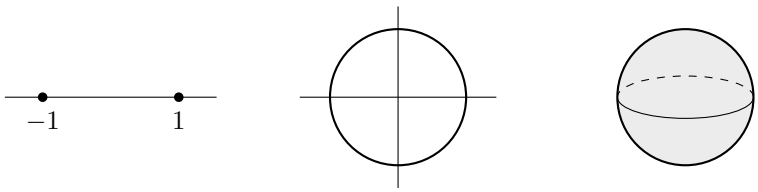
Exemplo 8.5. A *esfera unitária* de dimensão $n-1$,

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

é a hipersuperfície de classe C^∞ definida pela equação

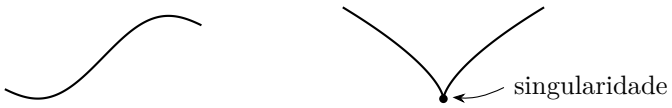
$$g(x) = \|x\|^2 - 1 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1.$$

(Exercício: verifique a condição "$g(p) = 0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$".)



$n = 1$: S^0 $\qquad$ $n = 2$: S^1 $\qquad$ $n = 3$: S^2

Observação 8.6. Veremos que a condição "$g(p) = 0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$" garante que H é uma *variedade* de classe C^k (sem *singularidades*),

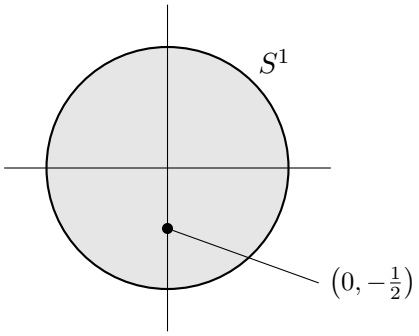


curva C^1 curva com singularidade

e que o *espaço tangente* a H em p é

$$T_pH = \{v \in \mathbb{R}^n : dg(p)v = 0\}.$$

Exemplo 8.7. Quais são o máximo e o mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2 + y$ no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$?



Pontos críticos no interior do disco:

$$df = 2x\,dx + (2y+1)\,dy = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \iff (x, y) = \left(0, -\tfrac{1}{2}\right),$$

e

$$\boxed{f\left(0, -\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{4}.}$$

Resta analisar o bordo $S^1 = \{(x, y) : x^2+y^2 = 1\}$ (com $g(x, y) = x^2+y^2-1$), o que nos leva a um problema de otimização com condições.

Teorema 8.8 (Multiplicador de Lagrange)**.** *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $f \in C^1(U)$ e $H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ uma hipersuperfície de classe C^1 contida em U. Se $p \in H$ é um extremo local de $f|_H \colon H \to \mathbb{R}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$df(p) = \lambda\, dg(p).$$

O número λ é chamado multiplicador de Lagrange.

Observação 8.9. A demonstração será feita em uma aula futura! A ideia é que basta mostrar que p é um *ponto crítico* de $f|_H$, isto é, que $df(p)|_{T_pH} \equiv 0$.

Exemplo 8.10 (De volta ao exemplo anterior)**.** Queremos resolver

$$\begin{cases} df = \lambda\, dg \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x\, dx + (2y+1)\, dy = \lambda(2x\, dx + 2y\, dy) \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} x = \lambda x \\ 2y + 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff x = 0 \ \text{ e } \ y = 1 \ (\lambda = \tfrac{3}{2}) \ \text{ ou } \ y = -1 \ (\lambda = \tfrac{1}{2}).$$

Temos $f(0,1) = 2$ e $f(0,-1) = 0$. Portanto:

- Máximo global: $f(0,1) = 2$;
- Mínimo global: $f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

(Na verdade, este exemplo é trivial, pois $f|_{S^1} = 1 + y$.)

Exemplo 8.11 (Teorema espectral)**.** Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica e $f(x) = \langle Ax, x\rangle$. Seja $u_1 \in S^{n-1}$ um ponto de máximo (global) de $f|_{S^{n-1}}$. Pelo teorema, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

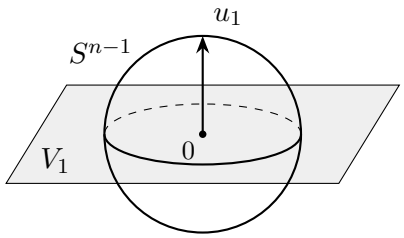
$$df(u_1) = \lambda_1\, dg(u_1),$$

onde $g(x) = \|x\|^2 - 1 = \langle x, x\rangle - 1$. Para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$df(u_1)v = 2\langle Au_1, v\rangle = \lambda_1\, dg(u_1)v = 2\lambda_1 \langle u_1, v\rangle \iff 2\langle Au_1 - \lambda_1 u_1, v\rangle = 0.$$

Logo, $Au_1 = \lambda_1 u_1$, ou seja, u_1 é um autovetor com autovalor λ_1.

Seja $V_1 = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u_1\rangle = 0\}$ o complemento ortogonal de $\mathbb{R}u_1$, de modo que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}u_1 \oplus V_1$.



Note que A preserva V_1, pois

$$\langle v, u_1\rangle = 0 \implies \langle Av, u_1\rangle = \langle v, Au_1\rangle = \langle v, \lambda_1 u_1\rangle = \lambda_1 \langle v, u_1\rangle = 0.$$

Considere a forma quadrática

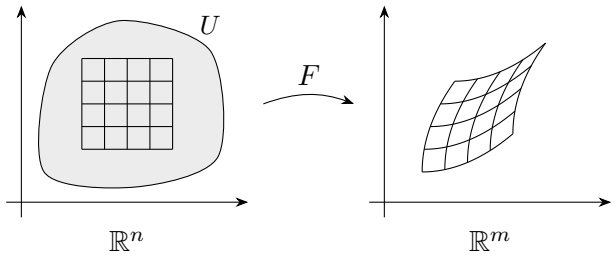
$$f|_{V_1} \colon V_1 \cong \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \langle Ax, x\rangle\,.$$

Maximizando $f|_{V_1}$ em $S^{n-1} \cap V_1 \cong S^{n-2}$, obtemos $u_2 \in V_1$ com $\|u_2\| = 1$ e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $Au_2 = \lambda_2 u_2$. E assim por diante, por indução...

9 03/04

8) Aplicações diferenciáveis

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 1$) uma aplicação.



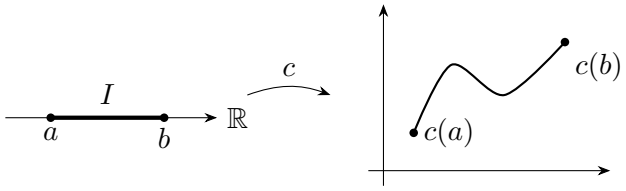
Falamos também de "funções a valores vetoriais". Escrevemos

$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x)),$$

onde cada $F_i\colon U \to \mathbb{R}$ é uma função, chamada a *i-ésima componente* de F.

Exemplo 9.1. Um *caminho* em $\mathbb{R}^m$ é uma aplicação

$$c\colon I \to \mathbb{R}^m, \qquad I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalo.}$$



Definição 9.2. Seja $p \in U$. A aplicação $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ é *diferenciável em p* se existe uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(p+v) = F(p) + Lv + o(\|v\|), \qquad v \to 0.$$

Isto é, "L é a transformação linear que melhor aproxima $F(p+v) - F(p)$ quando $v \to 0$".

Note que o resto $r(v) = F(p+v) - F(p) - Lv$ toma valores em $\mathbb{R}^m$! Por definição,

$$r(v) = o(\|v\|) \iff \frac{r(v)}{\|v\|} \to 0,$$

onde o limite é em $\mathbb{R}^m$. Isto é, se $r(v) = (r_1(v), \ldots, r_m(v))$, então

$$r(v) = o(\|v\|) \iff r_i(v) = o(\|v\|) \ \ \forall i.$$

Lema 9.3. *Se $F = (F_1, \ldots, F_m)$ é diferenciável em p e $L = (L_1, \ldots, L_m)$ é como na definição, então F_i é diferenciável em p e $L_i = dF_i(p)$ para todo $i = 1, \ldots, m$. (Aqui L_i denota a i-ésima componente de L.)*

Demonstração. Note que $L_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um funcional linear (a i-ésima componente de $L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$). Tomando a i-ésima componente na definição de diferenciabilidade, obtemos

$$F_i(p+v) = F_i(p) + L_i v + o(\|v\|), \qquad v \to 0. \qquad \square$$

Exercício 9.4. Mostre que vale a volta: se cada F_i é diferenciável em p, então F é diferenciável em p.

Segue do lema que L é única!

Definição 9.5. Se $F \colon U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em p, a *derivada* de F em p é a única transformação linear $DF(p) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(p+v) = F(p) + DF(p)v + o(\|v\|), \qquad v \to 0.$$

Observação 9.6. Outros nomes e notações: "aplicação tangente", T_pF, F_*, $F'(p)$.

Exemplo 9.7. Se $f \colon U \to \mathbb{R}$ é uma função, então $Df(p) = df(p)$.

Exemplo 9.8. Se $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim, digamos

$$F(x) = b + Lx \qquad (b \in \mathbb{R}^m,\ L \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}),$$

então

$$F(p+v) = b + L(p+v) = b + Lp + Lv = F(p) + Lv + 0,$$

e 0 é, evidentemente, $o(\|v\|)$. Logo, $DF(p) = L$.

Exercício 9.9. Mostre que se $F \colon U \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em p, então F é contínua em p.

Em geral,

$$DF(p) = (dF_1(p), \ldots, dF_m(p))$$

("as componentes da derivada são as diferenciais") e podemos definir:

- a *derivada direcional*

$$\frac{\partial F}{\partial v}(p) = DF(p)v = \left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(p), \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial v}(p) \right) \in \mathbb{R}^m;$$

- as *derivadas parciais*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = DF(p)e_j = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(p), \ldots, \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(p)\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\, e_i.$$

Definição 9.10. A *matriz jacobiana* de $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ em p é a matriz que representa a derivada $DF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$:

$$JF(p) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Observação 9.11. Notação em função das componentes:

$$JF(p) = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Esta notação é útil para "mudança de variáveis".

Observação (Cuidado!). No caso $m = n$, alguns autores usam "$JF(p)$" para o *determinante jacobiano* $\det JF(p)$.

Lembre que:

- as linhas de JF são as diferenciais das F_i:

$$JF = \begin{pmatrix} — & dF_1 & — \\ & \vdots & \\ — & dF_m & — \end{pmatrix};$$

- as colunas de JF são as derivadas parciais de F:

$$JF = \begin{pmatrix} | & & | \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Aqui usamos que uma matriz linha corresponde a um funcional linear, $M_{1\times n}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^*$, e uma matriz coluna corresponde a um vetor, $M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$.

Exemplo 9.12. Se $f\colon U \to \mathbb{R}$, então

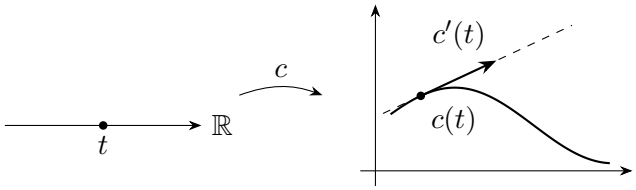
$$Jf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \in M_{1\times n}(\mathbb{R}),$$

ou seja, $Jf(p) = \nabla f(p)^t$ (com $\nabla f(p) \in \mathbb{R}^n \cong M_{n\times 1}(\mathbb{R})$).

Exemplo 9.13. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável, $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, com $c_i\colon I \to \mathbb{R}$. Então

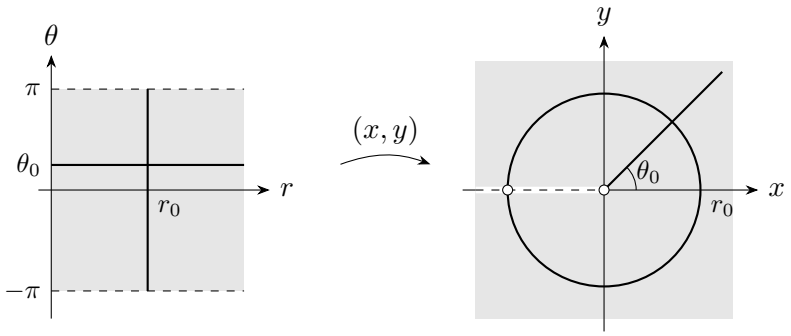
$$Jc(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} =: c'(t) \in \mathbb{R}^n \cong M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \qquad (= Dc(t)\,1).$$

O vetor $c'(t)$ é chamado "vetor tangente" ou "vetor velocidade".



Exemplo 9.14. Seja $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ -\pi < \theta < \pi\}$ e considere

$$(x,y)\colon U \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$



Então

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Definição 9.15. Uma aplicação $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ é de *classe* C^k se todas as suas componentes F_i são funções de classe C^k. Notação: $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$.

Lema 9.16. *Se $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$, então F é diferenciável (em todo ponto de) U.*

Demonstração. Segue do resultado análogo para funções ($m = 1$) e do exercício acima (F é diferenciável se, e somente se, suas componentes são diferenciáveis). □

Derivadas de ordem superior

Notação: $L(V;W)$ denota o espaço das transformações lineares $T\colon V \to W$.

Note que

$$\begin{array}{ccccc} L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) & \cong & M_{m\times n}(\mathbb{R}) & \cong & \mathbb{R}^{m\cdot n} \\ T & \longmapsto & A=(a_{ij})_{i,j} & \longmapsto & (a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{m1},\ldots,a_{mn}) \end{array}$$

onde $Te_j = \sum_i a_{ij}e_i$.

Uma aplicação diferenciável $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ induz uma aplicação

$$DF\colon U \to L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{mn}, \qquad p \mapsto DF(p),$$

cujas componentes, sob a identificação $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{mn}$, são as derivadas parciais $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. Logo:

- $F \in C^1(U;\mathbb{R}^m) \iff F$ é diferenciável em U e DF é contínua;
- $F \in C^2(U;\mathbb{R}^m) \iff F \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ e $DF \in C^1(U;L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$.

A *segunda derivada* é

$$D^2F\colon U \to L(\mathbb{R}^n;L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)), \qquad p \mapsto D(DF)(p),$$

e temos

$$L(V_1;L(V_2;W)) \cong L(V_1\otimes V_2;W) \qquad \text{(aplicações bilineares } V_1\times V_2 \to W).$$

Em geral, a *k-ésima derivada* de F em p é uma aplicação multilinear

$$D^kF(p)\colon \underbrace{\mathbb{R}^n\otimes\cdots\otimes\mathbb{R}^n}_{k \text{ cópias}} \to \mathbb{R}^m,$$

$$v^{(1)}\otimes\cdots\otimes v^{(k)} \longmapsto \frac{\partial^k F}{\partial v^{(1)}\cdots\partial v^{(k)}}(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k F}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(p)\, v^{(1)}_{i_1}\cdots v^{(k)}_{i_k}.$$

Observação 9.17. Se f é uma função, então

$$d^kf(p)v^{\otimes k} = D^kf(p)\, v\otimes\cdots\otimes v.$$

10 08/04

Aula passada.

- Aplicações diferenciáveis: a uma aplicação $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em p associamos a sua *derivada* $DF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- $DF(p) = (dF_1(p), \ldots, dF_m(p))$, representada pela matriz jacobiana

$$JF(p) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

- Derivadas superiores: $D^kF(p) \in L\big((\mathbb{R}^n)^{\otimes k}; \mathbb{R}^m\big)$. Por exemplo, $D^2F(p)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a aplicação bilinear

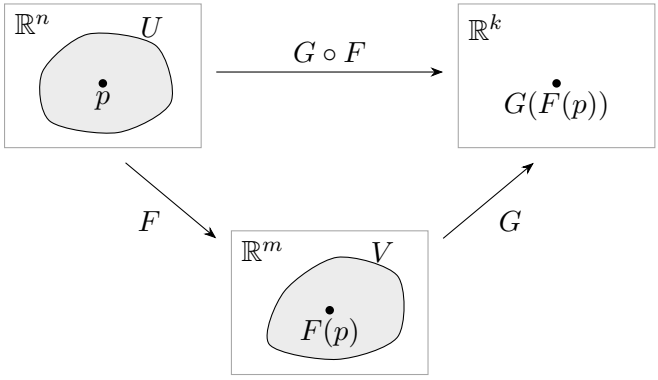
$$(v, w) \longmapsto \frac{\partial^2 F}{\partial v\, \partial w}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}(p)\, v_i w_j.$$

Note que, se F é de classe C^2 (o mesmo funciona para F "duas vezes diferenciável"), o teorema de Schwarz equivale a dizer que $D^2F(p)$ é simétrica.

9) Regra da cadeia

A regra da cadeia trata das derivadas de composições.

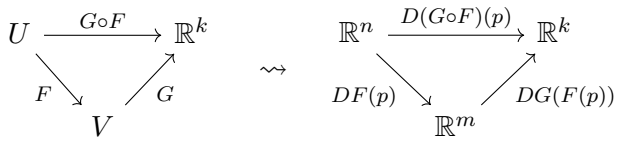
Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em $p \in U$, com $F(U) \subseteq V$, e $G\colon V \to \mathbb{R}^k$ uma aplicação diferenciável em $F(p)$.



Teorema 10.1 (Regra da cadeia)**.** *Nas hipóteses acima, $G\circ F$ é diferenciável em p e*

$$D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \circ DF(p).$$

Ou seja, “a derivada da composição é a composição das derivadas”:



Demonstração. Denotemos $q = F(p)$, $L = DF(p)$, $M = DG(q)$ e $H = G \circ F$. Queremos mostrar que

$$H(p+v) = H(p) + (M \circ L)v + o(\|v\|), \qquad v \to 0.$$

Considere os restos

$$\begin{aligned} r_H(v) &= H(p+v) - H(p) - (M \circ L)v, && \text{(queremos mostrar que é } o(\|v\|)) \\ r_F(v) &= F(p+v) - F(p) - Lv, && \text{(sabemos que é } o(\|v\|)) \\ r_G(w) &= G(q+w) - G(q) - Mw, && \text{(sabemos que é } o(\|w\|)). \end{aligned}$$

Vamos escrever $r_H(v)$ em função de r_F e r_G. Como $H = G \circ F$, $F(p) = q$ e $Lv = F(p+v) - F(p) - r_F(v)$,

$$\begin{aligned} r_H(v) &= H(p+v) - H(p) - (M \circ L)v \\ &= G(F(p+v)) - G(F(p)) - M\big(F(p+v) - F(p) - r_F(v)\big) \\ &= G(F(p+v)) - G(q) - M\big(F(p+v) - q\big) + M\, r_F(v) \\ &= G(q+w) - G(q) - Mw + M\, r_F(v) \qquad (w := F(p+v) - q) \\ &= r_G(w) + M\, r_F(v). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{r_H(v)}{\|v\|} = \frac{r_G(w)}{\|v\|} + M\left(\frac{r_F(v)}{\|v\|}\right) = \frac{r_G(w)}{\|w\|} \cdot \frac{\|w\|}{\|v\|} + M\left(\frac{r_F(v)}{\|v\|}\right).$$

(Se $w = 0$, convencionamos $\frac{r_G(w)}{\|w\|} := 0$; como $r_G(0) = 0$, a igualdade continua válida.) Mas, pela desigualdade triangular,

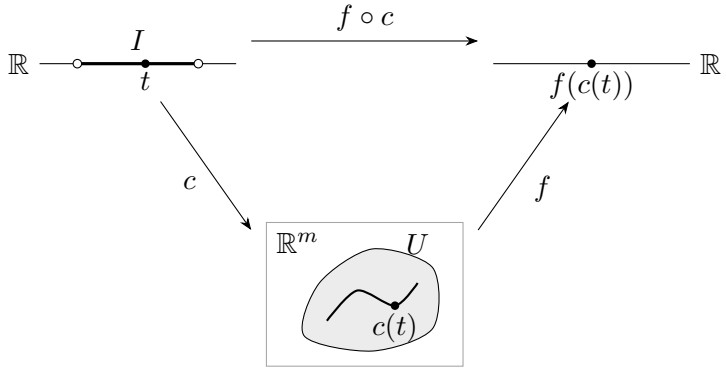
$$\begin{aligned} \frac{\|w\|}{\|v\|} &= \frac{\|F(p+v) - F(p)\|}{\|v\|} = \frac{\|Lv + r_F(v)\|}{\|v\|} \\ &\leqslant \frac{\|Lv\|}{\|v\|} + \frac{\|r_F(v)\|}{\|v\|} \leqslant \|L\| + \frac{\|r_F(v)\|}{\|v\|}, \end{aligned}$$

onde $\|L\|$ é a norma de operador: $\|L\| = \sup\left\{\frac{\|Lv\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$. Donde

$$0 \leqslant \frac{\|r_H(v)\|}{\|v\|} \leqslant \frac{\|r_G(w)\|}{\|w\|}\left(\|L\| + \frac{\|r_F(v)\|}{\|v\|}\right) + \left\|M\left(\frac{r_F(v)}{\|v\|}\right)\right\|.$$

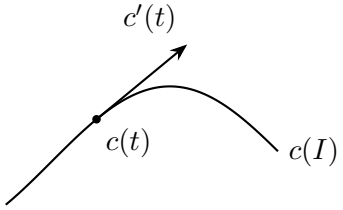
Quando $v \to 0$, o primeiro fator tende a 0 (pois F é contínua em p, logo $w \to 0$), o fator entre parênteses é limitado, e o último termo tende a 0 (pois M é contínua). Portanto $r_H(v) = o(\|v\|)$. □

Exemplo 10.2 ($n = k = 1$)**.** Sejam $c\colon I \to U \subseteq \mathbb{R}^m$ um caminho ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto) e $f\colon U \to \mathbb{R}$. Então $f \circ c\colon I \to \mathbb{R}$.



Temos, como $Dc(t)\,1 = c'(t)$,

$$\begin{aligned}(f \circ c)'(t) &= D(f \circ c)(t)\,1 \\ &= Df(c(t)) \circ Dc(t)\,1 \\ &= Df(c(t))\,c'(t) \\ &= df(c(t))\,c'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t))\,c_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(c(t))\,c_m'(t).\end{aligned}$$



Por exemplo, se $c(t) = p + tv$ e $\varphi(t) = (f \circ c)(t)$, então $\varphi'(t) = df(p + tv)\,v$.

Corolário 10.3. *Nas condições do teorema 10.1,*

$$J(G \circ F)(p) = JG(F(p)) \cdot JF(p),$$

onde $\cdot$ denota a multiplicação de matrizes.

Demonstração. Imediato do teorema, pois a matriz da composição de aplicações lineares é o produto das matrizes. □

Com coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ em $\mathbb{R}^n$ e $y_1, \ldots, y_m$ em $\mathbb{R}^m$, obtemos:

$$\frac{\partial (G_i \circ F)}{\partial x_j}(p) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_l}(F(p))\,\frac{\partial F_l}{\partial x_j}(p).$$

Corolário 10.4. *Se $F \in C^j(U;\mathbb{R}^m)$ e $G \in C^j(V;\mathbb{R}^k)$, então $G \circ F \in C^j(U;\mathbb{R}^k)$.*

Demonstração. Segue da fórmula acima para as derivadas parciais de $G \circ F$, por indução em j. □

Por abuso, pensando em termos de "variáveis",

$$\begin{cases} y_1 = F_1(x_1,\dots,x_n) \\ \quad\vdots \\ y_m = F_m(x_1,\dots,x_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = G_1(y_1,\dots,y_m) \\ \quad\vdots \\ z_k = G_k(y_1,\dots,y_m) \end{cases}$$

temos

$$\frac{\partial(z_1,\dots,z_k)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\partial(z_1,\dots,z_k)}{\partial(y_1,\dots,y_m)} \cdot \frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)},$$

isto é,

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_l}\,\frac{\partial y_l}{\partial x_j}.$$

Exemplo 10.5 (Equação da onda em dimensão 1)**.** Considere a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \text{ (fixo)},$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f = f(t,x)$. Qual é a solução geral?

Considere a mudança de variáveis (D'Alembert):

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ t = \dfrac{u-v}{2c} \end{cases}$$

e defina a função de classe C^2

$$g(u,v) = f(t,x) = f\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2c}\,\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v\,\partial u} &= \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}\,\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{2c}\left(-\frac{1}{2c}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2c}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois os termos com derivadas mistas se cancelam (teorema de Schwarz) e os demais se cancelam pela equação da onda. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(u), \qquad h \in C^1(\mathbb{R}).$$

Seja $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ uma primitiva de h. Então

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{d\varphi}{du}(u) \implies g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v),$$

com $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Logo,

$$f(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

Exercício 10.6. Verifique que, se $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ são quaisquer, então $\varphi(x-ct) + \psi(x+ct)$ é uma solução da equação da onda.

11 10/04

Aula passada. Regra da cadeia:

- $D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \circ DF(p)$;
- em variáveis, se $y_l = F_l(x)$ e $z_i = G_i(y)$, então $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_j} = \displaystyle\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}$.

10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa

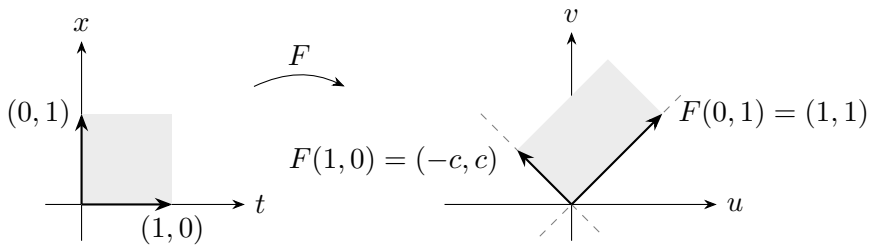
Podemos pensar em um difeomorfismo de duas maneiras: como uma maneira de "identificar" conjuntos (de forma diferenciável), ou como uma mudança de sistema de coordenadas.

Definição 11.1. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abertos. Dizemos que $F\colon U \to V$ é um *difeomorfismo de classe* C^k ($k \geqslant 1$) se $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ e F admite uma inversa $F^{-1}\colon V \to U$ com $F^{-1} \in C^k(V; \mathbb{R}^n)$.

Exemplo 11.2. Sejam $U = V = \mathbb{R}^2$ e $F(t,x) = (x - ct,\ x + ct)$, com $c \neq 0$. Então

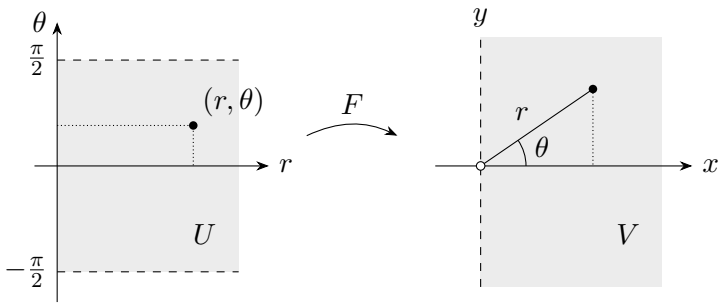
$$F^{-1}(u,v) = \left(\frac{v-u}{2c},\ \frac{u+v}{2}\right),$$

e F é um difeomorfismo de classe C^∞, com $JF = \begin{pmatrix} -c & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$.



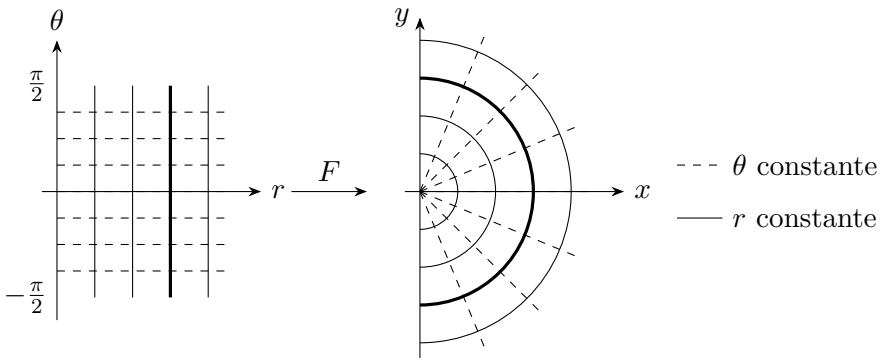
Exemplo 11.3 (Coordenadas polares)**.** Sejam $U = \{(r,\theta) : r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ e $V = \{(x,y) : x > 0\}$, e

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta).$$



Temos

$$F^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\, \operatorname{arctg}(y/x)\right).$$



Note que F identifica os segmentos verticais com semicírculos: um segmento "|" e um semicírculo ")" são difeomorfos.

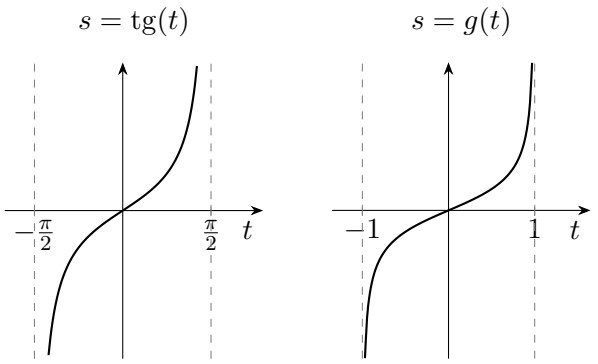
Pergunta. Existe um difeomorfismo que identifique um segmento de reta (aberto ou fechado) com o círculo inteiro S^1? (Resposta: não...)

Observação 11.4. Todo difeomorfismo é um *homeomorfismo* (aplicação contínua com inversa contínua). Em particular, difeomorfismos preservam propriedades topológicas (aberto, fechado, compacto, conexo, ...).

Exemplo 11.5 (Difeomorfismo entre uma bola e o espaço euclidiano?)**.** *Caso* $n = 1$. Temos os difeomorfismos

$$f\colon \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \operatorname{tg}(t), \qquad f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right),\ s \mapsto \operatorname{arctg}(s),$$

$$g\colon (-1,1) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad g^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-1,1),\ s \mapsto \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}.$$

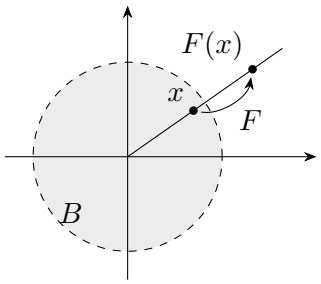


Caso $n \geqslant 1$. Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$. Então

$$F\colon B \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}$$

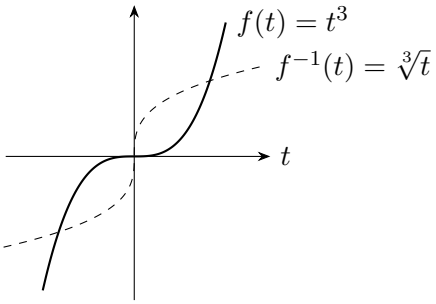
é de classe C^∞, com inversa também de classe C^∞:

$$F^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}.$$



Observação 11.6 (Atenção!). Para que $F\colon U \to V$ seja um difeomorfismo de classe C^k, *não basta* que F seja bijetiva e de classe C^k.

Exemplo 11.7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$. Então f é uma bijeção de classe C^∞ (e um homeomorfismo!), mas $f^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ não é diferenciável em $t = 0$!



Corolário 11.8 (da regra da cadeia)**.** *Se $F\colon U \to V$ é um difeomorfismo, então, para todo $p \in U$, $DF(p) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é invertível e, se $q = F(p)$,*

$$DF^{-1}(q) = DF(p)^{-1}.$$

"A derivada da inversa é a inversa da derivada."

Demonstração. Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} F \circ F^{-1} = \mathrm{Id}_V &\implies DF(p) \circ DF^{-1}(q) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}, \\ F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_U &\implies DF^{-1}(q) \circ DF(p) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$ □

Observação 11.9 (Importante). Espaços vetoriais isomorfos têm a mesma dimensão. Assim, se existe um difeomorfismo $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to V \subseteq \mathbb{R}^m$, então necessariamente $n = m$: "difeomorfismo preserva dimensão". (Isto não é óbvio para homeomorfismos; veja o "teorema da invariância do domínio"...)

Em termos da jacobiana: se $F\colon U \to V$ é um difeomorfismo e $p \in U$, então $JF(p) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível ($\iff \det JF(p) \neq 0$) e

$$JF^{-1}(q) = JF(p)^{-1} \quad \text{(inversa de matriz)}.$$

Exemplo 11.10. Seja $F(r,\theta) = (r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta) = (x,y)$ como acima. Temos

$$JF(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det JF(r,\theta) = r > 0,$$

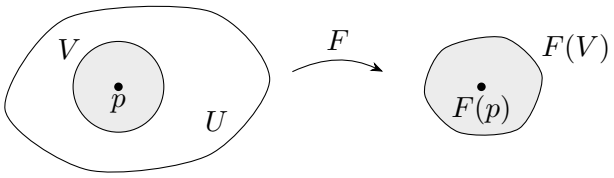
e

$$\begin{aligned} JF(r,\theta)^{-1} &= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x & y \\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = JF^{-1}(x,y). \end{aligned}$$

Note que $\det JF^{-1}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{r}$.

Pergunta. Vale a volta do corolário (na vizinhança de p)?

Teorema 11.11 (Função inversa)**.** *Seja $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geqslant 1$) e $p \in U$ tal que $DF(p)$ é invertível ($\det JF(p) \neq 0$). Então existe uma vizinhança V de p tal que $F(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto e $F\colon V \to F(V)$ é um difeomorfismo de classe C^k.*



Ou seja: "se a aproximação de primeira ordem em p é invertível, então F é invertível na vizinhança de p".

Observação 11.12. Denotemos $y_i = F_i(x_1, \ldots, x_n)$. Se $dy_1(p), \ldots, dy_n(p)$ são linearmente independentes (base de $(\mathbb{R}^n)^*$), então, na vizinhança de p, podemos "resolver"

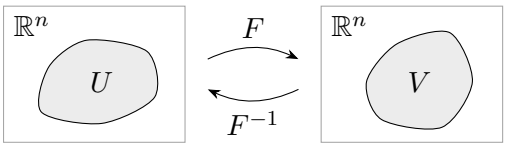
$$\begin{cases} y_1 = F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad \vdots \\ y_n = F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = G_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \quad \vdots \\ x_n = G_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

(onde $G = F^{-1}$), e $(y_1, \ldots, y_n)$ é um novo "sistema de coordenadas" na vizinhança de p.

12 22/04

Aula passada.

- Difeomorfismos $F\colon U \to V$ ($U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos, F bijetiva de classe C^k, F^{-1} de classe C^k): "mudança de sistema de coordenadas".



  Note: composição de difeomorfismos é difeomorfismo!

- Se F é difeomorfismo, então $DF(p)\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo ($\iff \det JF(p) \neq 0$) e $DF(p)^{-1} = DF^{-1}(F(p))$.

10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa (cont.)

Definição 12.1. Uma aplicação $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ é dita um *difeomorfismo local em* $p \in U$ se existe uma vizinhança V de p tal que $F(V)$ é aberto e $F\colon V \to F(V)$ é um difeomorfismo. Dizemos que F é um *difeomorfismo local* (em U) se F é um difeomorfismo local em todo ponto $p \in U$.

Exemplo 12.2. A aplicação

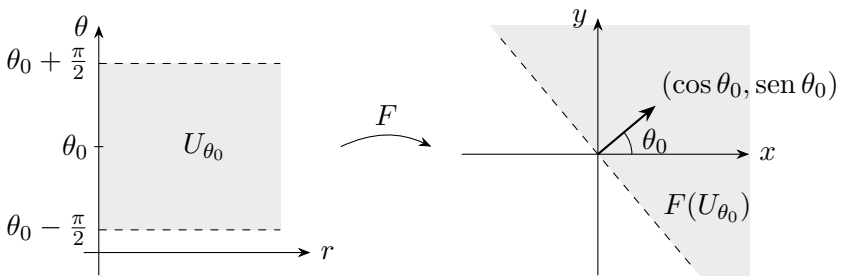
$$F\colon U \to \mathbb{R}^2, \quad U = \{(r,\theta) : r > 0\}, \qquad (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta),$$

é um difeomorfismo local: para todo $\theta_0 \in \mathbb{R}$, se

$$U_{\theta_0} = \left\{(r,\theta) : r > 0,\ \theta_0 - \tfrac{\pi}{2} < \theta < \theta_0 + \tfrac{\pi}{2}\right\},$$

então $F\colon U_{\theta_0} \to F(U_{\theta_0})$ é um difeomorfismo, onde

$$F(U_{\theta_0}) = \{(x,y) : \langle (x,y), (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)\rangle > 0\}.$$



Uma maneira de ver isso é reduzir ao caso U_0. Seja $T_{\theta_0}: U \to U$ a "translação de θ_0", $(r,\theta) \mapsto (r, \theta+\theta_0)$. Então

$$\begin{array}{ccc} (r,\theta+\theta_0) & & U \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2 \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle T_{\theta_0}} \nearrow \\ (r,\theta) & & U \end{array}$$

$$(r,\theta) \longmapsto \big(r\cos(\theta+\theta_0),\, r\,\mathrm{sen}(\theta+\theta_0)\big) = R_{\theta_0}\big(\underbrace{r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta}_{F(r,\theta)}\big),$$

onde R_{θ_0} é a rotação de ângulo θ_0:

$$\begin{array}{ccc} (r,\theta+\theta_0) & U \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2 & (\cos\theta_0\, x - \mathrm{sen}\,\theta_0\, y,\ \mathrm{sen}\,\theta_0\, x + \cos\theta_0\, y) \\ \uparrow & \uparrow{\scriptstyle T_{\theta_0}} \nearrow {\scriptstyle R_{\theta_0}}\uparrow & \uparrow \\ (r,\theta) & U \xrightarrow[F]{} \mathbb{R}^2 & (x,y) \end{array}$$

Assim, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U_{\theta_0} & \xrightarrow{\quad F \quad} & F(U_{\theta_0}) \\ {\scriptstyle T_{\theta_0}\ (\text{difeo.})}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle R_{\theta_0}\ (\text{difeo.})} \\ U_0 & \xrightarrow[F\ (\text{difeo.})]{} & F(U_0) \end{array}$$

$$F(U_0) = \{(x,y) : x > 0\} = \{(x,y) : \langle (x,y), e_1\rangle > 0\},$$

e portanto $F\colon U_{\theta_0} \to F(U_{\theta_0})$ é um difeomorfismo, com

$$\big(F|_{U_{\theta_0}}\big)^{-1}(x,y) = T_{\theta_0} \circ \big(F|_{U_0}\big)^{-1} \circ R_{\theta_0}^{-1}(x,y) = \cdots$$

Teorema 12.3 (Função inversa)**.** *Seja $F \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$, $k \geqslant 1$. Então F é um difeomorfismo local em $p \in U$ se, e somente se, $DF(p)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Basta mostrar a volta (a ida é o corolário da regra da cadeia visto na aula passada).

Podemos supor $p = 0$, $F(p) = 0$ e $DF(p) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. De fato, temos o diagrama comutativo

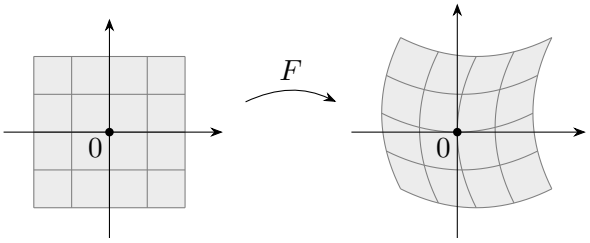
$$\begin{array}{ccc} x+p & U \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n & x \\ \uparrow & \uparrow{\scriptstyle \text{difeo.}} \quad \downarrow{\scriptstyle \text{difeo.}} & \downarrow \\ x & U-p \longrightarrow \mathbb{R}^n & DF(p)^{-1}(x - F(p)) \end{array}$$

$$x \longmapsto DF(p)^{-1}\big(F(x+p) - F(p)\big)$$

e a aplicação da linha de baixo leva 0 em 0 e tem derivada Id em 0.

Logo, na vizinhança de 0,

$$F(x) = x + R(x), \qquad R(x) = o(\|x\|).$$



1) F é injetiva na vizinhança de 0. (Aqui usamos a hipótese de que F é de classe C^1.) Como $DR(0) = 0$, segue do lema da P1 (Q4, item (c)), com $\varepsilon = \frac{1}{2}$, que existe uma vizinhança V de 0 tal que, para $x_1, x_2 \in V$ distintos,

$$\|R(x_1) - R(x_2)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Mas

$$\begin{aligned}\|R(x_1) - R(x_2)\| &= \|F(x_1) - F(x_2) - (x_1 - x_2)\| \\ &\geqslant \|x_1 - x_2\| - \|F(x_1) - F(x_2)\|,\end{aligned}$$

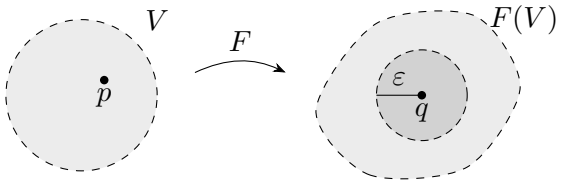
donde

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \geqslant \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\| > 0.$$

Em particular, $x_1 \neq x_2 \implies F(x_1) \neq F(x_2)$.

2) $F(V)$ é aberto. Seja $q = F(p) \in F(V)$, com $p \in V$. Queremos $\varepsilon > 0$ tal que $\|y - q\| < \varepsilon \implies y \in F(V)$, isto é,

$$y = F(x) = x + R(x) \quad \text{para algum } x \in V.$$

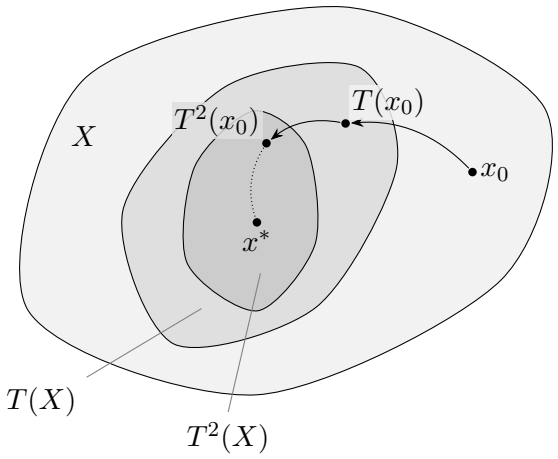


A ideia é transformar isto em um problema de ponto fixo. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, seja

$$T_y \colon V \to \mathbb{R}^n, \qquad T_y(x) = x - (F(x) - y) = y - R(x).$$

Note que $T_y(x) = x \iff y = F(x)$.

Teorema 12.4 (Ponto fixo de Banach)**.** *Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é fechado e não vazio e $T\colon X \to X$ é uma* contração *(isto é, Lipschitz com constante < 1), então T tem um único ponto fixo $x^* \in X$ ($T(x^*) = x^*$). Além disso, dado qualquer $x_0 \in X$, $x^* = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$, onde $T^n(x_0) = T(T(\cdots T(x_0)))$.*



Queremos $\varepsilon > 0$ tal que $\|y - q\| < \varepsilon \implies T_y$ é uma contração em algum fechado contido em V. Seja $r > 0$ tal que $\bar{B} = \bar{B}(p, r) \subseteq V$ (bola fechada de centro p e raio r). Se $\|y - q\| < \frac{r}{2} =: \varepsilon$ e $x \in \bar{B}$, então, como $T_y(p) - p = y - R(p) - p = y - F(p)$,

$$\begin{aligned}\|T_y(x) - p\| &\leqslant \|T_y(x) - T_y(p)\| + \|T_y(p) - p\| \\ &= \|R(x) - R(p)\| + \|F(p) - y\| \\ &< \tfrac{1}{2}\|x - p\| + \tfrac{r}{2} \leqslant r.\end{aligned}$$

Logo $T_y(\bar{B}) \subseteq \bar{B}$, e T_y é uma contração em $\bar{B}$, pois, se $x_1, x_2 \in \bar{B} \subseteq V$ são distintos,

$$\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| = \|R(x_1) - R(x_2)\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe $x \in \bar{B}$ tal que $T_y(x) = x$, isto é, $y = F(x)$.

3) A inversa $F^{-1}\colon F(V) \to V$ é de classe C^k. Note que V é construída pela condição

$$\|DR(p) - DR(0)\| = \|DR(p)\| < \tfrac{1}{2} \quad \text{para todo } p \in V$$

(veja o lema da P1). Logo, como $F(x) = x + R(x)$,

$$\|DF(p) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\| = \|DR(p)\| < \tfrac{1}{2}.$$

Em particular, $DF(p)$ é invertível: se $v \neq 0$,

$$\begin{aligned}\|DF(p)v\| &= \|(DF(p) - \mathrm{Id})v + v\| \\ &\geqslant \|v\| - \|DF(p) - \mathrm{Id}\|\,\|v\| \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}\|v\| \neq 0.\end{aligned}$$

(Em geral: $\|L - \mathrm{Id}\| < 1 \implies L^{-1} = \mathrm{Id} + (\mathrm{Id} - L) + (\mathrm{Id} - L)^2 + \cdots$.)

Se $q = F(p) \in F(V)$, queremos mostrar que

$$F^{-1}(q + w) = F^{-1}(q) + DF(p)^{-1}w + o(\|w\|), \qquad w \to 0.$$

Para w suficientemente pequeno, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $q + w = F(p + v)$; assim $F^{-1}(q + w) = p + v$ e $F^{-1}(q) = p$. Logo,

$$\begin{aligned}&\|F^{-1}(q + w) - F^{-1}(q) - DF(p)^{-1}w\| \\ &\qquad = \|v - DF(p)^{-1}w\| \\ &\qquad = \Big\|-DF(p)^{-1}\big(F(p + v) - F(p) - DF(p)v\big)\Big\| \\ &\qquad \leqslant \|DF(p)^{-1}\|\,\|F(p + v) - F(p) - DF(p)v\|,\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}&\frac{\|F^{-1}(q + w) - F^{-1}(q) - DF(p)^{-1}w\|}{\|w\|} \\ &\qquad \leqslant \|DF(p)^{-1}\| \cdot \frac{\|F(p + v) - F(p) - DF(p)v\|}{\|v\|} \cdot \frac{\|v\|}{\|w\|}.\end{aligned}$$

Agora,

$$\|v\| - \|w\| \leqslant \|w - v\| = \|F(p + v) - F(p) - v\| = \|R(p + v) - R(p)\| \leqslant \frac{\|v\|}{2},$$

donde $\|w\| \geqslant \frac{\|v\|}{2}$. Portanto $\frac{\|v\|}{\|w\|}$ é limitado e $v \to 0$ quando $w \to 0$. Isto mostra que F^{-1} é diferenciável em q, com derivada $DF(p)^{-1}$.

... (a demonstração continua na próxima aula.)

13 24/04

Aula passada. Vimos a noção de difeomorfismo local e enunciamos o teorema da função inversa:

> Seja $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geqslant 1$. Então F é um difeomorfismo local de classe C^k em $p \in U$ se, e somente se, $DF(p)$ é invertível.

Começamos a demonstração da implicação ($\Leftarrow$). Supondo, sem perda de generalidade, $p = 0$, $F(p) = 0$ e $DF(p) = \mathrm{Id}$, escrevemos

$$F(x) = x + R(x), \qquad R(x) = o(\|x\|),$$

e mostramos que:

1) F é injetiva em uma vizinhança V de 0; ($\checkmark$)
2) $F(V)$ é aberto; ($\checkmark$)
3) $F\colon V \to F(V)$ é um difeomorfismo de classe C^k.

Do item 3), só mostramos até agora que $F^{-1}\colon F(V) \to V$ é diferenciável.

10) Difeomorfismos e o teorema da função inversa (cont.)

Fim da demonstração do teorema da função inversa. Para ver que F^{-1} é de classe C^k, denote

$$GL(\mathbb{R}^n) := \{L \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) : L \text{ é isomorfismo}\},$$

que é um aberto em $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. (Identificando aplicações lineares com matrizes, $GL(\mathbb{R}^n) \cong GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$.)

Pela regra da cadeia, temos a fórmula

$$DF^{-1}(q) = DF\big(F^{-1}(q)\big)^{-1}, \qquad q \in F(V),$$

(se $q = F(p)$, então $F^{-1}(q) = p$), isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{DF^{-1}} & GL(\mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle F^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{inv}} \\ V & \xrightarrow[DF]{} & GL(\mathbb{R}^n) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} L^{-1} \\ \uparrow \\ L \end{array}$$

Note que $\mathrm{inv}\colon GL(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$, $L \mapsto L^{-1}$, é um difeomorfismo de classe C^∞.

Exercício 13.1. Mostre que $\mathrm{inv}\colon GL(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$ é um difeomorfismo de classe C^∞. (Use a fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\,C^t,$$

onde C é a matriz dos cofatores de A.)

Como DF é contínua (pois $F \in C^k$, $k \geqslant 1$) e F^{-1} também é contínua (pois é diferenciável), segue que

$$DF^{-1} = \mathrm{inv} \circ DF \circ F^{-1}$$

é contínua. Isto mostra que F^{-1} é de classe C^1.

Se $k \geqslant 2$, note que em $DF^{-1} = \mathrm{inv} \circ DF \circ F^{-1}$ temos inv de classe C^∞, DF de classe C^{k-1} (em particular, C^1) e F^{-1} de classe C^1; logo DF^{-1} é de classe C^1. Portanto, F^{-1} é de classe C^2. Por indução, mostramos que F^{-1} é de classe C^k. □

Corolário 13.2. *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geqslant 1$.*

(i) Se $\det JF(p) \neq 0$ para todo $p \in U$, então F é uma aplicação aberta *($F(V)$ é aberto para todo aberto $V \subseteq U$).*

(ii) Se $\det JF(p) \neq 0$ para todo $p \in U$ e F é injetiva, então $F\colon U \to F(U)$ é um difeomorfismo.

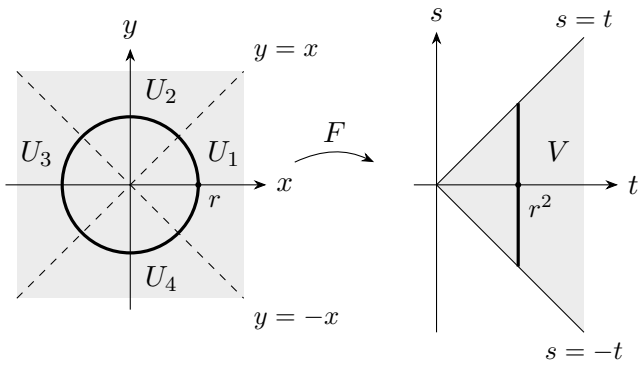
Exemplo 13.3. Seja

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto (t, s) = (x^2 + y^2,\ 2xy).$$

Note que

$$t + s = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \geqslant 0,$$
$$t - s = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geqslant 0.$$

Em coordenadas polares, $F(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = (r^2, r^2\,\mathrm{sen}(2\theta))$.



Assim,

$$F(\mathbb{R}^2) = \{(t,s) : t+s \geqslant 0,\ t-s \geqslant 0\},$$

que é fechado (não é aberto!). Temos

$$\det JF = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 - y^2),$$

de modo que F é um difeomorfismo local no aberto

$$U = \{(x,y) : x \neq \pm y\} = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \sqcup U_4.$$

Temos $F(U) = F(U_i) = \{(t,s) : t+s > 0,\ t-s > 0\} =: V$, e F é injetiva (e portanto um difeomorfismo sobre V) em cada um dos U_i. Por exemplo,

$$F|_{U_1}^{-1} \colon V \to U_1, \qquad (t,s) \mapsto \left(\frac{\sqrt{t+s} + \sqrt{t-s}}{2},\ \frac{\sqrt{t+s} - \sqrt{t-s}}{2} \right),$$

pois

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t \\ 2xy = s \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^2 = t+s \\ (x-y)^2 = t-s \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = \sqrt{t+s} \\ x-y = \sqrt{t-s} \end{cases}$$

(a última equivalência valendo em U_1).

11) Teorema da função implícita

Seja $g \colon U \to \mathbb{R}$ uma função. Como garantir que a equação

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

pode ser "resolvida" em alguma das variáveis x_i? Isto é, quando vale

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff x_i = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

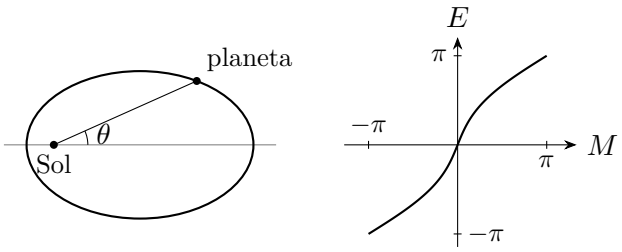
para alguma função f (que não depende de x_i)? Neste caso, dizemos que g define x_i como uma *função implícita* das outras variáveis $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Em outras palavras: podemos descrever os pontos de $\{(x_1, \ldots, x_n) : g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ como *gráfico de uma função* de $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$?

Exemplo 13.4 (Equação de Kepler)**.** Considere a equação

$$M = E - e \operatorname{sen}(E),$$

onde $0 < e < 1$ é uma constante (a excentricidade da órbita). Aqui E é aproximadamente o ângulo θ da posição do planeta na órbita elíptica, e M é, a menos de constante, o tempo.



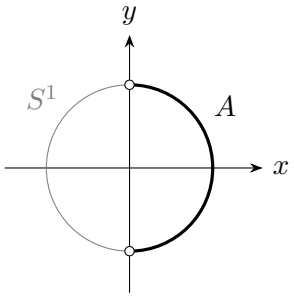
Podemos escrever E como função de M? Neste caso, trata-se de uma função inversa: se

$$f(t) = t - e\,\mathrm{sen}(t), \qquad f'(t) = 1 - e\cos(t) > 0,$$

então existe uma inversa f^{-1}.

Observação. f^{-1} não se escreve em termos de funções elementares (mas veja: "fórmula de inversão de Lagrange").

Exemplo 13.5. Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.



Não é possível descrever S^1 globalmente como gráfico de uma função. Considere o pedaço

$$A = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}.$$

A não é o gráfico de uma função de x, mas é o gráfico de uma função de y:

$$(x, y) \in A \iff x = \sqrt{1 - y^2}.$$

Teorema 13.6 (Função implícita, para uma única equação)**.** *Seja $g\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k, $k \geqslant 1$. Se $p \in U$ é tal que $g(p) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$, então existem $\delta > 0$ e uma função $f\colon V \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, definida em uma vizinhança V de $(p_1, \ldots, p_{n-1})$, tais que:*

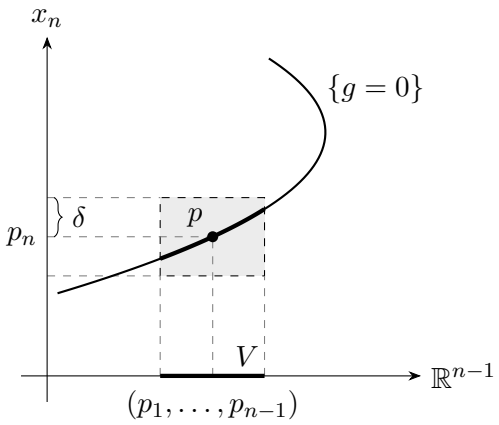
(i) se $x \in V$ e $|y - p_n| < \delta$, então

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = 0 \iff y = f(x);$$

(ii) f é de classe C^k e

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x, f(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x, f(x))}.$$

Ou seja: "se $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$, o conjunto $\{g = 0\}$ é o gráfico de uma função de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ na vizinhança de $(p_1, \ldots, p_{n-1})$".

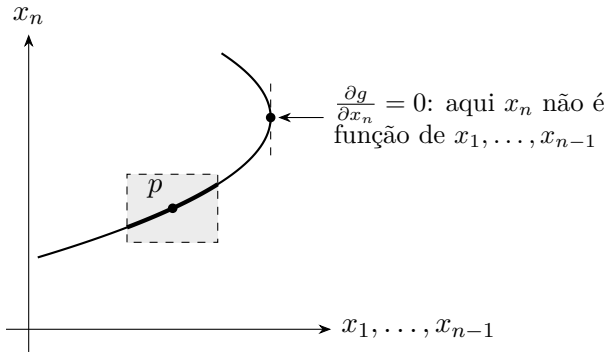


Observação 13.7. Se $g(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ é linear, a condição $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) = a_n \neq 0$ implica trivialmente que podemos resolver $g = 0$ em x_n.

14 28/04

Aula passada. Terminamos a prova do teorema da função inversa (com um exemplo) e enunciamos o teorema da função implícita para uma única equação:

> "$g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0 \Longrightarrow x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ (função implícita) na vizinhança de p."



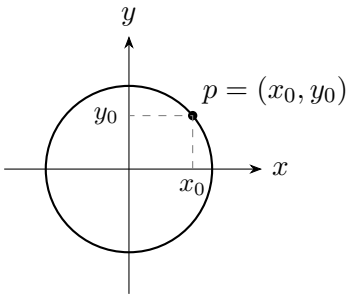
O enunciado análogo vale para qualquer variável x_i no lugar de x_n!

11) Teorema da função implícita (cont.)

Corolário 14.1. *Se $g \in C^k(U)$ ($k \geqslant 1$) e $p \in U$ é tal que $g(p) = 0$ e $dg(p) \neq 0$, então existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que $\{x \in V : g(x) = 0\}$ é o gráfico de uma função de classe C^k.*

Demonstração. Temos $dg(p) \neq 0$ se, e somente se, existe i tal que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \neq 0$, e o enunciado segue do teorema da função implícita aplicado à variável x_i. □

Exemplo 14.2. Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $p = (x_0, y_0) \in S^1$.



Temos

$$dg(p) = 2\big(x_0\,dx(p) + y_0\,dy(p)\big).$$

Se $x_0 \neq 0$, então S^1 é o gráfico de uma função de y na vizinhança de p (a saber, $y \mapsto \pm\sqrt{1-y^2}$). Se $y_0 \neq 0$, então, analogamente, S^1 é o gráfico de uma função de x na vizinhança de p.

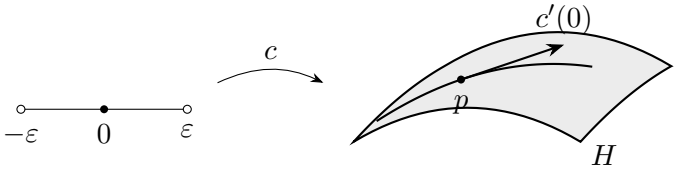
Lembre que, se $g \in C^k(U)$, $k \geqslant 1$, e

$$H = \{x \in U : g(x) = 0\}$$

é tal que $dg(p) \neq 0$ para todo $p \in H$, dizemos que H é a *hipersuperfície* (de classe C^k) definida por $g = 0$. Assim, o corolário acima diz que "uma hipersuperfície é localmente o gráfico de uma função".

Proposição 14.3. *Se H é uma hipersuperfície de classe C^k ($k \geqslant 1$) definida por $g = 0$ e $p \in H$, então*

$$\operatorname{Ker} dg(p) = \{c'(0) : c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to H \text{ caminho de classe } C^k,\ c(0) = p\}.$$



Demonstração. Se $c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to H$ é um caminho tal que $c(0) = p$, então

$$g \circ c(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in (-\varepsilon,\varepsilon),$$

donde

$$dg(c(0))\,c'(0) = dg(p)\,c'(0) = 0 \iff c'(0) \in \operatorname{Ker} dg(p).$$

Para a outra inclusão, como $dg(p) \neq 0$, podemos supor $\frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \neq 0$ ("a menos de reordenar as variáveis"). Pelo teorema da função implícita, H é o gráfico de uma função (de classe C^k) $f(x_1,\ldots,x_{n-1})$ na vizinhança de p, tal que

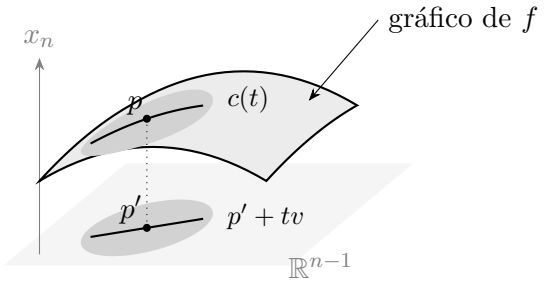
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\,\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x, f(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x, f(x))}.$$

Dado $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $dg(p)v = 0$, queremos $c\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to H$ de classe C^k tal que $c'(0) = v$.

Como $g(x_1,\ldots,x_{n-1},f(x_1,\ldots,x_{n-1})) \equiv 0$, o caminho

$$c(t) := \big(p_1 + tv_1,\ \ldots,\ p_{n-1} + tv_{n-1},\ f(p_1 + tv_1,\ldots,p_{n-1} + tv_{n-1})\big)$$

é de classe C^k e sua imagem está contida em H.



Além disso, escrevendo $p' = (p_1, \ldots, p_{n-1})$,

$$c'(0) = \left(v_1,\ \ldots,\ v_{n-1},\ v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p') + \cdots + v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p') \right).$$

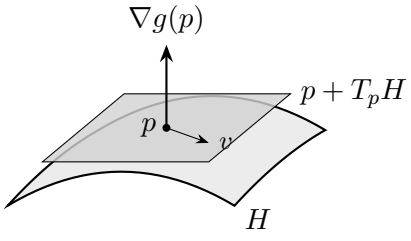
Mas,

$$\begin{aligned} & v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p') + \cdots + v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p') \\ & \quad = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(p)} \left(v_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(p) + \cdots + v_{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(p) \right) \\ & \quad = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(p)} \left(-v_n \frac{\partial g}{\partial x_n}(p) \right) = v_n, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos que $dg(p)v = 0$. Portanto, $c'(0) = v$. □

Definição 14.4. O subespaço $T_pH = \operatorname{Ker} dg(p)$ é dito *espaço tangente* a H em p.

Ou seja, T_pH é o "espaço dos *vetores tangentes* em p de caminhos em H".



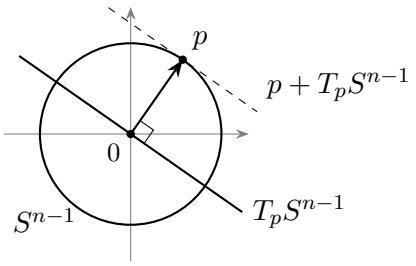
Note que T_pH é o subespaço dos vetores *ortogonais* a $\nabla g(p)$:

$$v \in T_pH \iff \langle v, \nabla g(p) \rangle = 0.$$

Observação (Atenção!). $T_pH \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subespaço vetorial, e não passa por p necessariamente!

Exemplo 14.5. Seja $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. Se $p \in S^{n-1}$, então

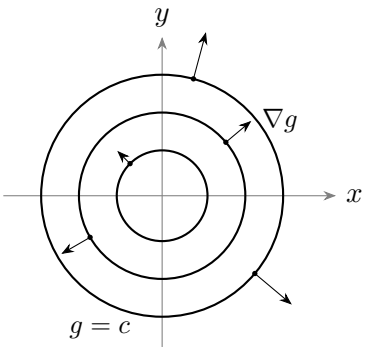
$$T_p S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : v_1 p_1 + \cdots + v_n p_n = 0\}.$$



Observação 14.6. O gradiente ∇g é ortogonal a todas as "hipersuperfícies de nível"

$$\{x \in U : g(x) = c\}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

(note que $g(x) = c \iff g(x) - c = 0$).



Aplicação da proposição: demonstração do teorema dos multiplicadores de Lagrange. Lembre o enunciado: sejam $f \in C^1(U)$ e $H = \{g = 0\} \subseteq U$ uma hipersuperfície, com $g \in C^1(U)$. Se p é um extremo local de $f|_H$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $df(p) = \lambda\, dg(p)$.

Demonstração. Se p é um extremo local de $f|_H$, então 0 é um extremo local de $f \circ c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ para qualquer caminho (de classe C^1) $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to H$ com $c(0) = p$. Logo,

$$0 = (f \circ c)'(0) = df(c(0))\, c'(0) = df(p)\, c'(0).$$

Pela proposição, $T_p H = \operatorname{Ker} dg(p) \subseteq \operatorname{Ker} df(p)$, e o resultado segue do seguinte lema de álgebra linear: se $\ell, \ell' \in V^*$ e $\operatorname{Ker}(\ell) \subseteq \operatorname{Ker}(\ell')$, então $\ell' = \lambda\ell$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. □

15 06/05

Aula passada.

- Hipersuperfícies de classe C^k ($k \geqslant 1$): $H = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$, com g de classe C^k e $dg(p) \neq 0$ para todo $p \in H$.
- Teorema da função implícita: H é localmente o gráfico de uma função (de classe C^k) de $n-1$ variáveis.
- Espaço tangente: $T_pH = \operatorname{Ker} dg(p) = \{c'(0) : c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to H,\ 0 \mapsto p\}$.
- Aplicação: multiplicadores de Lagrange.

11) Teorema da função implícita (cont.)

Vejamos agora a versão geral.

Teorema 15.1 (Função implícita)**.** *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$ um aberto (com coordenadas $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$) e $G\colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k ($k \geqslant 1$). Se $(p, q) \in U$ é tal que $G(p, q) = 0$ e*

$$\det \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(p, q) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \neq 0,$$

então existem uma vizinhança W de q e uma aplicação $F\colon V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, definida em uma vizinhança V de p, tais que: se $(x, y) \in V \times W$, então

$$G(x, y) = 0 \iff y = F(x).$$

(O caso de uma única equação, visto anteriormente, corresponde a $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.)

Observação. A matriz jacobiana de G tem a forma em blocos

$$JG = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial G_i}{\partial x_j} & \frac{\partial G_i}{\partial y_j} \end{array} \right)_{m \times (n+m)},$$

onde o primeiro bloco é $m \times n$ e o segundo é $m \times m$.

Note que $JG(p, q)$ representa o sistema linear em $v = (v_1, \ldots, v_{n+m})$:

$$\underbrace{JG(p, q)}_{A}\, v = 0 \iff \begin{cases} dG_1(p, q)\, v = 0 \\ \quad \vdots \\ dG_m(p, q)\, v = 0 \end{cases}$$

Há "mais incógnitas que equações" (um sistema *subdeterminado*, ou *underdetermined system*). Escrevendo $A = (B \,|\, C)$, temos

$$Av = 0 \iff \left(\begin{array}{c|c} B & C \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+m} \end{pmatrix} = 0$$

$$\xLeftrightarrow{\det C \neq 0} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{C^{-1}B}_{m\times n} & \underbrace{I}_{m\times m} \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+m} \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff C^{-1}B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+m} \end{pmatrix} = 0,$$

o que nos dá os v_{n+i} em função de $v_1, \ldots, v_n$.

Demonstração do teorema. Defina

$$\Phi \colon U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \qquad (x, y) \mapsto (x, G(x, y)).$$

Então Φ é de classe C^k e $\det J\Phi(p, q) \neq 0$, pois

$$J\Phi = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \frac{\partial G_i}{\partial x_j} & \frac{\partial G_i}{\partial y_j} \end{array} \right).$$

Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança $Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de (p, q) tal que $\Phi|_Y \colon Y \to \Phi(Y)$ é um difeomorfismo de classe C^k. Podemos supor que Y é da forma $Y = V \times W$, onde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (resp. $W \subseteq \mathbb{R}^m$) é uma vizinhança de p (resp. q). Note que Φ^{-1} é da forma

$$\Phi^{-1}(x, y) = (x, \Psi(x, y)) \in V \times W.$$

Diminuindo V, se necessário, podemos supor que $(x, 0) \in \Phi(V \times W)$ para todo $x \in V$ (pois $\Phi(V \times W)$ é um aberto que contém $\Phi(p, q) = (p, 0)$). Tome $F(x) := \Psi(x, 0)$. Dado $(x, y) \in V \times W$,

$$\begin{aligned} G(x, y) = 0 &\iff \Phi(x, y) = (x, G(x, y)) = (x, 0) \\ &\iff (x, y) = \Phi^{-1}(x, 0) = (x, \Psi(x, 0)) \\ &\iff y = \Psi(x, 0) = F(x). \end{aligned}$$

□

Observação 15.2. As derivadas $\partial F/\partial x_i$ podem ser calculadas derivando $G(x, F(x)) \equiv 0$ e resolvendo o sistema linear em $\partial F_1/\partial x_i, \ldots, \partial F_m/\partial x_i$: se $y_j := F_j(x)$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i}(G(x, F(x))) \\ &= \frac{\partial G}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial G}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_i} \end{pmatrix},$$

onde $C = \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_j}\right)$ é a matriz do enunciado.

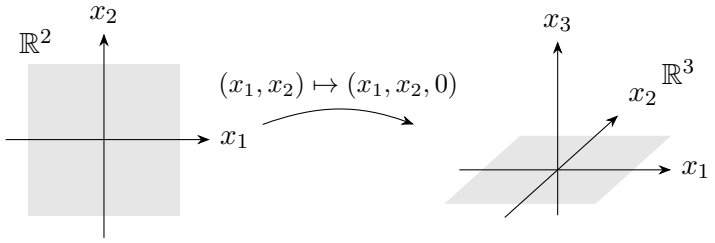
12) Imersões, submersões e posto constante

Definição 15.3. Uma aplicação diferenciável $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita *imersão em* $p \in U$ se $DF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva. Se F é imersão em todo $p \in U$, dizemos que F é uma *imersão* (em U).

Observação. Se $DF(p)$ é injetiva, então $n \leqslant m$.

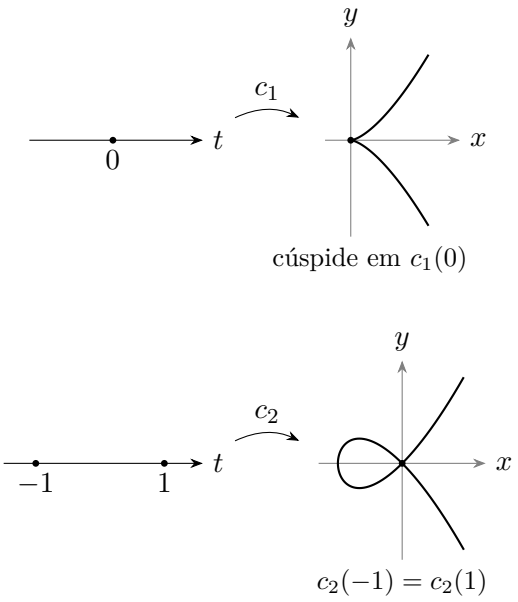
Exemplo 15.4 (Imersão canônica)**.** Se $n \leqslant m$, temos a imersão

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$



Exemplo 15.5. Seja $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ um caminho diferenciável. Então c é imersão em $t \in I$ se, e somente se, $c'(t) \neq 0$. Considere

$$c_1(t) = (t^2, t^3), \qquad c_2(t) = (t^2 - 1,\ t^3 - t) = (t^2 - 1,\ t(t^2 - 1)).$$



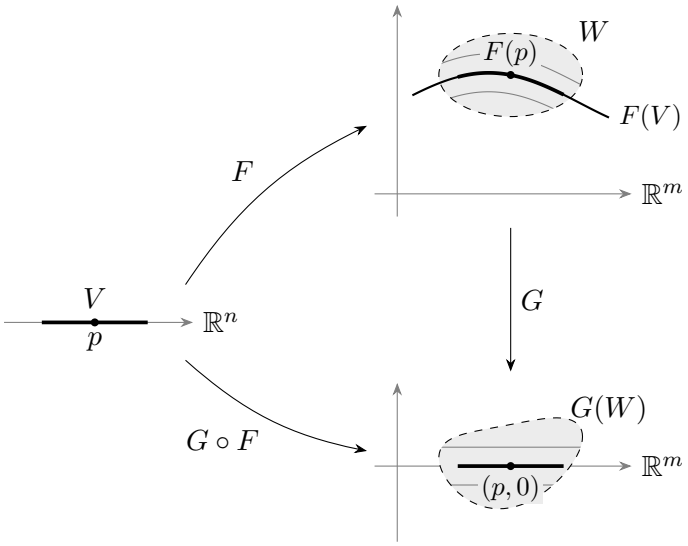
Temos

$$c_1'(t) = (2t, 3t^2), \qquad c_2'(t) = (2t, 3t^2 - 1).$$

Assim, c_1 não é imersão em $t = 0$ (mas é injetiva!), enquanto c_2 é imersão em todo ponto (mas não é injetiva!). (Ser imersão está ligado à existência de reta tangente.)

Teorema 15.6 (Forma local das imersões)**.** *Se $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$, $k \geqslant 1$, é uma imersão em $p \in U$, então existem uma vizinhança $V \subseteq U$ de p e um difeomorfismo $G\colon W \to G(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ de classe C^k, definido em uma vizinhança W de $F(p)$, tais que*

$$G \circ F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \quad \textit{para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in V.$$



Ou seja: “toda imersão é localmente canônica, a menos de uma mudança de sistema de coordenadas (difeomorfismo) no contradomínio”.

16 08/05

12) Imersões, submersões e posto constante (cont.)

Teorema 16.1 (Forma local das imersões)**.** *Se $F \in C^k(U;\mathbb{R}^m)$, $k \geqslant 1$, é uma imersão em $p \in U$, então existem uma vizinhança $V \subseteq U$ de p e um difeomorfismo $G\colon W \to G(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ de classe C^k, definido em uma vizinhança W de $F(p)$, tais que*

$$G \circ F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \quad \textit{para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in V.$$

Demonstração. Por hipótese, os vetores

$$v_1 := DF(p)e_1, \ \ldots, \ v_n := DF(p)e_n$$

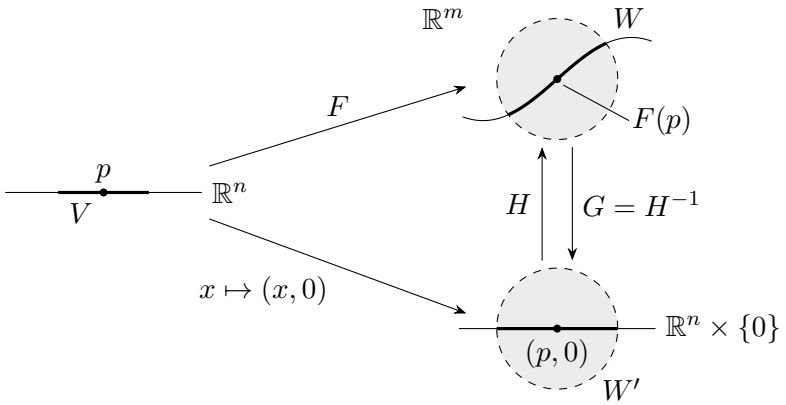
são linearmente independentes, e podemos completá-los a uma base $v_1, \ldots, v_m$ de $\mathbb{R}^m$. Defina

$$\begin{aligned} H\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) &\longmapsto F(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}v_{n+1} + \cdots + x_m v_m. \end{aligned}$$

Note que H é de classe C^k e $DH(p,0)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, pois

$$JH(p,0) = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_m \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança W' de $(p,0)$ tal que $H\colon W' \to H(W')$ é um difeomorfismo de classe C^k. Tome $W := H(W')$, $G = H^{-1}$ e $V = \{x \in U : (x,0) \in W'\}$ (logo $V \subseteq F^{-1}(W)$).



Como

$$H(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

e $H(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = G^{-1}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, concluímos que

$$G \circ F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0). \qquad \square$$

Corolário 16.2. *Se $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ é uma imersão em $p \in U$, então existe uma vizinhança V de p onde F é injetiva.* $\square$

Em outras palavras: "imersões são localmente injetivas".

Observação 16.3. Também segue do teorema que F é uma imersão em uma vizinhança de p.

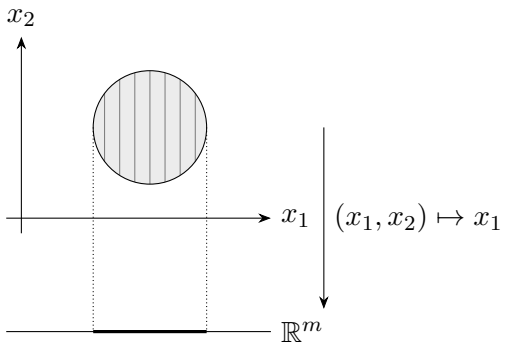
Definição 16.4. Uma aplicação diferenciável $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita uma *submersão em $p \in U$* se $DF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva. Se F é submersão em todo $p \in U$, dizemos que F é uma *submersão* (em U).

Observação 16.5. Se $DF(p)$ é sobrejetiva, então $n \geqslant m$.

Exemplo 16.6 (Submersão canônica)**.** Para $n \geqslant m$, a "projeção"

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

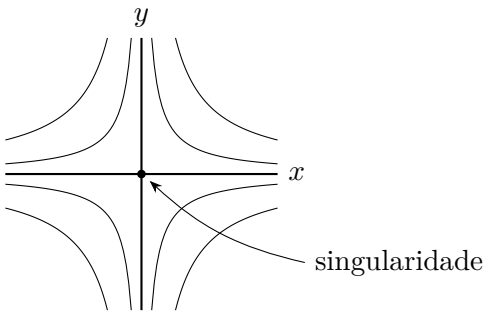
é uma submersão.



Exemplo 16.7. Se $f\colon U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

f é submersão em $p \in U \iff df(p) \neq 0$ (isto é, p é ponto regular).

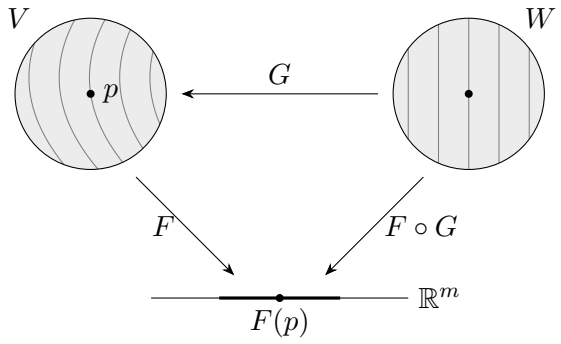
Exemplo 16.8. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Temos $df = y\,dx + x\,dy$, e f é uma submersão em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. A origem é uma "singularidade" das curvas de nível:



Observação 16.9. Em geral, $DF(p)$ é sobrejetiva se, e somente se, os funcionais $dF_1(p), \ldots, dF_m(p)$ são linearmente independentes.

Teorema 16.10 (Forma local das submersões)**.** *Se $F \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$, $k \geqslant 1$, é uma submersão em $p \in U$, então existem uma vizinhança $V \subseteq U$ de p e um difeomorfismo $G\colon W \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ de classe C^k tais que*

$$F \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m) \quad \textit{para todo } (x_1, \ldots, x_n) \in W.$$



Em outras palavras: "toda submersão é localmente canônica, a menos de uma mudança de sistema de coordenadas (difeomorfismo) no domínio".

Demonstração. Por hipótese, os vetores

$$DF(p)e_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}(p), \ \ldots, \ DF(p)e_n = \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) \ \in \mathbb{R}^m$$

geram $\mathbb{R}^m$; logo, m destes vetores formam uma base de $\mathbb{R}^m$. A menos de uma permutação das variáveis x_j (que é um difeomorfismo no domínio), podemos supor que $DF(p)e_1, \ldots, DF(p)e_m$ formam uma base de $\mathbb{R}^m$. Defina

$$\begin{aligned} H\colon U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \cong \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (F(x), x_{m+1}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

onde $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$. Note que H é de classe C^k e

$$DH(p)v = (DF(p)v, v_{m+1}, \ldots, v_n).$$

Logo,

$$\underbrace{DH(p)e_1 = (DF(p)e_1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ DH(p)e_m = (DF(p)e_m, 0, \ldots, 0)}_{\text{base de } \mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n},$$

$$DH(p)e_{m+1} \in e_{m+1} + \mathbb{R}^m \times \{0\},\ \ldots,\ DH(p)e_n \in e_n + \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema da função inversa, H é um difeomorfismo em uma vizinhança de p, e tomamos $G = H^{-1}$. □

Observação 16.11. A hipótese sobre $DF(p)e_1, \ldots, DF(p)e_m$ na demonstração é equivalente a

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \neq 0.$$

Corolário 16.12. *Se $F \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ é uma submersão em $p \in U$, então existe uma vizinhança V de p tal que $F|_V$ é aberta.* □

Em outras palavras: "submersões são aplicações abertas".

Exercício 16.13. Demonstre o corolário. (Composição de aplicações abertas é aberta; projeções são abertas.)

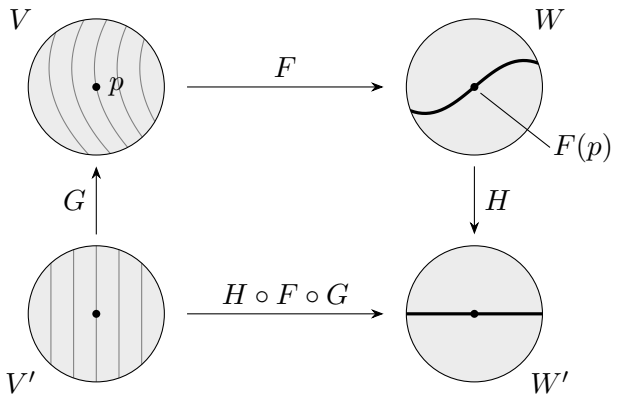
Lembre. O *posto* de uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a dimensão da imagem. Se A é a matriz de L, o posto é

$$\begin{array}{ccc} \text{máx. de colunas l.i. de } A & = & \text{máx. de linhas l.i. de } A \\ \| & & \| \\ Le_1, \ldots, Le_n \in \mathbb{R}^m & & L_1, \ldots, L_m \in (\mathbb{R}^n)^* \end{array}$$

(o maior posto possível é $\min(m, n)$).

Teorema 16.14 (Posto constante)**.** *Seja $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, $k \geqslant 1$. Suponha que o posto de DF seja* constante *igual a $r \leqslant \min(m, n)$ em uma* vizinhança *de $p \in U$. Então, existem vizinhanças V de p e W de $F(p)$ e difeomorfismos $G\colon V' \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ e $H\colon W \subseteq \mathbb{R}^m \to W'$ tais que*

$$H \circ F \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$



Em outras palavras: "uma aplicação C^k de posto constante $= r$ é localmente da forma $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$, a menos de difeomorfismos (no domínio e no contradomínio)".

17 13/05

Aula passada.

- Forma local das imersões (DF injetiva, $n \leqslant m$):

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

- Forma local das submersões (DF sobrejetiva, $n \geqslant m$):

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m).$$

12) Imersões, submersões e posto constante (cont.)

Lembre. O *posto* de uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a dimensão da imagem. Se A é a matriz de L, o posto é

$$\begin{array}{ccc} \text{máx. de colunas l.i. de } A & = & \text{máx. de linhas l.i. de } A \\ \| & & \| \\ Le_1, \ldots, Le_n \in \mathbb{R}^m & & L_1, \ldots, L_m \in (\mathbb{R}^n)^* \end{array}$$

O *posto máximo* (maior posto possível) é $\min(m, n)$.

Relembremos o enunciado do teorema do posto constante, visto ao final da aula passada.

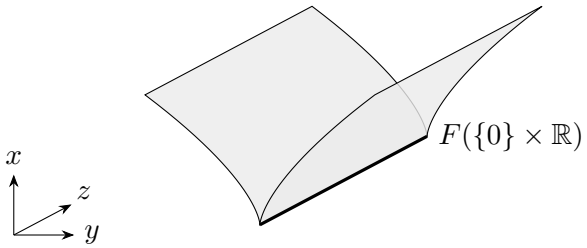
Teorema 17.1 (Posto constante)**.** *Seja $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, $k \geqslant 1$. Suponha que o posto de DF seja* constante *igual a $r \leqslant \min(m, n)$* em uma vizinhança *de $p \in U$. Então, existem vizinhanças V de p e W de $F(p)$ e difeomorfismos $G\colon V' \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ e $H\colon W \subseteq \mathbb{R}^m \to W'$ tais que*

$$H \circ F \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

(Ver a figura da aula passada.) "Uma aplicação C^k de posto constante r é localmente da forma $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$, a menos de difeomorfismos (no domínio e no contradomínio)."

Observação. É importante que o posto seja constante em toda uma vizinhança de p!

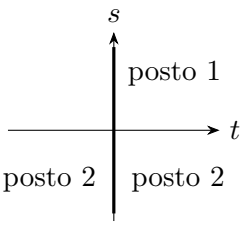
Exemplo 17.2. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(t, s) \mapsto (t^2, t^3, s) = (x, y, z)$.



Temos

$$JF = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 3t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e o posto de $JF(0,0)$ é 1; mas o posto de $JF(t,s)$ é 2 para $t \neq 0$, isto é, o posto só é 1 sobre o eixo s:



Mas não é verdade que existem sistemas de coordenadas nos quais F é da forma $(t,s) \mapsto (t,0,0)$ numa vizinhança de $(0,0)$. (F é injetiva, mas $(t,s) \mapsto (t,0,0)$ não é injetiva em nenhuma vizinhança de $(0,0)$.)

O teorema da função inversa e as formas locais da imersão e da submersão são corolários imediatos do teorema do posto constante, pois:

(i) O posto de uma matriz A é a maior ordem (= número de linhas ou colunas) possível de um *menor* (= determinante de uma submatriz quadrada de A) não nulo de A.

(ii) Se $JF(p)$ tem *posto máximo* igual a r, então existe um menor não nulo de ordem r. Se F é C^1, o menor análogo de $JF(x)$ será não nulo para todo x em uma vizinhança de p. Como r é máximo, $JF(x)$ tem posto r para todo x em uma vizinhança de p. Ou seja: "se $DF(p)$ tem posto máximo, então DF tem posto máximo (logo constante) em uma vizinhança de p".

(iii) $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tem posto máximo se, e somente se,

$$\begin{cases} L \text{ é um isomorfismo,} & \text{se } m = n, \\ L \text{ é injetiva,} & \text{se } n \leqslant m, \\ L \text{ é sobrejetiva,} & \text{se } n \geqslant m. \end{cases}$$

Observação 17.3. O argumento anterior mostra, mais geralmente, que, se F é de classe C^1, a função

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{posto de } DF(x) \end{aligned}$$

é *semicontínua inferiormente*, isto é, para todo $p \in U$, existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que

$$\text{posto de } DF(x) \geqslant \text{posto de } DF(p)$$

para todo $x \in V$.

Demonstração do teorema do posto constante. Por hipótese, $\mathrm{Im}(DF(p)) \subseteq \mathbb{R}^m$ é um subespaço de dimensão r. A menos de uma mudança de base (isomorfismo linear $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$), podemos supor que

$$\mathrm{Im}(DF(p)) = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_r = \mathbb{R}^r \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Considere a projeção

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^r \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_r). \end{aligned}$$

Pela forma local das submersões (aplicada a $P \circ F$), existe uma vizinhança V de p e um difeomorfismo (de classe C^k) $G\colon V' \subseteq \mathbb{R}^n \to V$ tal que

$$P \circ F \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r).$$

Logo,

$$F \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, y_{r+1}(x), \ldots, y_m(x)),$$

onde $y_{r+1}, \ldots, y_m$ são funções de classe C^k. Note que

$$J(F \circ G) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right) \begin{matrix} \}r \\ \}m-r \end{matrix} \qquad \text{onde} \qquad D = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{r+1 \leqslant i \leqslant m \\ r+1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Como G é um difeomorfismo, $DG(x)$ é um isomorfismo, e portanto

$$\text{posto de } J(F \circ G)(x) = \text{posto de } JF(G(x))$$

é constante igual a r em uma vizinhança de $p' = G^{-1}(p)$. Assim, temos $D \equiv 0$ nesta mesma vizinhança, que podemos supor *convexa* e igual a V'; mais precisamente, tomamos V' uma bola centrada em p', de modo que $(x_1, \ldots, x_r, p'_{r+1}, \ldots, p'_n) \in V'$ sempre que $x \in V'$ (diminuindo-a ainda, se necessário, na aplicação da forma local das imersões abaixo). Logo, $y_{r+1}, \ldots, y_m$ "não dependem das variáveis $x_{r+1}, \ldots, x_n$". Considere

$$\begin{aligned} I\colon \mathbb{R}^r &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_r) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_r, p'_{r+1}, \ldots, p'_n), \end{aligned}$$

de forma que

$$F \circ G \circ I|_{I^{-1}(V')}(x_1, \ldots, x_r) \\ = (x_1, \ldots, x_r,\, y_{r+1}(x_1, \ldots, x_r, p'_{r+1}, \ldots, p'_n), \ldots, y_m(\cdots))$$

é uma imersão em $(p'_1, \ldots, p'_r)$. Pela forma local das imersões, existe uma vizinhança W de $F(p)$ (que podemos supor tal que $V \subseteq F^{-1}(W)$) e um difeomorfismo $H\colon W \to W' \subseteq \mathbb{R}^m$ (de classe C^k) tal que

$$(H \circ F \circ G \circ I)(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

Como $F \circ G \circ I(x_1, \ldots, x_r) = F \circ G(x_1, \ldots, x_n)$, concluímos que

$$H \circ F \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0). \qquad \square$$

18 15/05

Aula passada. Teorema do posto constante: se $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^k, $k \geqslant 1$, e tem posto constante r em uma vizinhança de p, então "F é da forma"

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

na vizinhança de p.

Corolário 18.1. *Seja $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1.*

(i) Se F é localmente injetiva, então F é uma imersão em um aberto denso *em U. Em particular, $n \leqslant m$.*

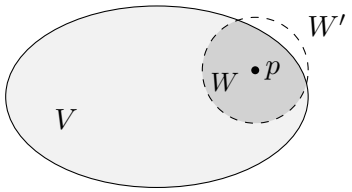
(ii) Se F é aberta, então F é uma submersão em um aberto denso *em U. Em particular, $n \geqslant m$.*

Demonstração de (i). Seja $W \subseteq U$ um aberto onde o posto de DF é constante $= r$. Pelo teorema do posto, F "é da forma"

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

Tal aplicação é injetiva se, e somente se, $r = n$. Logo, F é uma imersão em W.

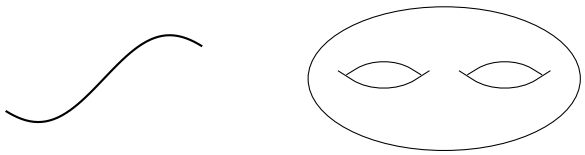
Se V é um aberto qualquer em U, seja $p \in V$ onde $DF(p)$ tem posto máximo $= r$ em V (lembre: posto $\leqslant \min\{m, n\}$).



Pela semicontinuidade inferior, existe uma vizinhança W' de p onde o posto de DF é $\geqslant r$. Logo, o posto de DF é constante igual a r em $W := W' \cap V$. Pelo parágrafo anterior, $r = n$ e F é uma imersão em W. □

13) Variedades diferenciáveis ("suaves")

Variedades são generalizações de curvas e superfícies para "objetos geométricos" de dimensão arbitrária.

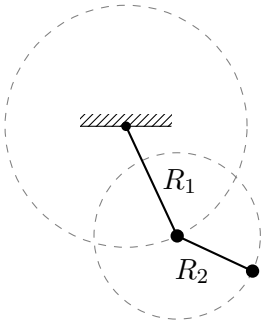


curva
(dim 1)

superfície
(dim 2)

Observação 18.2. Existe uma noção *intrínseca* de variedade. Neste curso, trataremos apenas de subvariedades de algum $\mathbb{R}^n$.

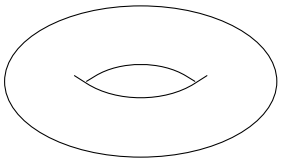
Exemplo 18.3 (Pêndulo duplo)**.** Considere um pêndulo duplo, com o primeiro ponto fixo e hastes de comprimentos R_1 e R_2.



O espaço de configurações (estados) é

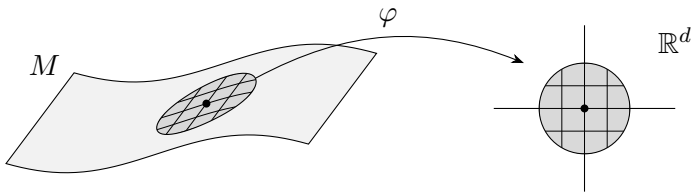
$$S_{R_1} \times S_{R_2},$$

onde $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Assim, $S_{R_1} \times S_{R_2} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ é um *toro*!



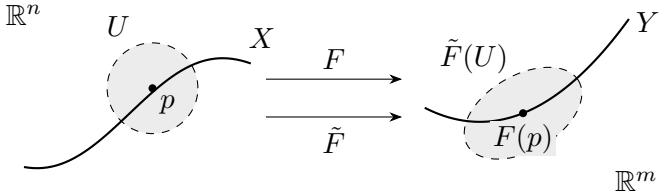
Queremos: uma noção de "objeto geométrico" (variedade) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ que nos permita fazer cálculo diferencial em M. Por exemplo: o que é a diferenciabilidade de uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$? E pontos críticos?

Propriedade fundamental: M é uma "variedade de dimensão d" se M "é localmente" um $\mathbb{R}^d$.



Definição 18.4 (Milnor)**.** Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ subconjuntos (arbitrários!) e $k \geqslant 1$. Uma aplicação $F\colon X \to Y$ é dita *de classe* C^k se, para todo $p \in X$, existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de p e uma aplicação de classe C^k $\tilde{F}\colon U \to \mathbb{R}^m$ tal que

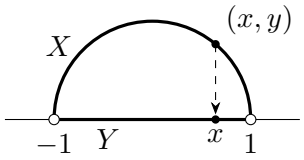
$$\tilde{F}|_{U\cap X} = F|_{U\cap X}.$$



Diremos que $F\colon X \to Y$ é um *difeomorfismo de classe* C^k se F é um homeomorfismo e F e F^{-1} são de classe C^k.

Observação 18.5. "De classe C^∞" = *suave*.

Exemplo 18.6. Sejam $X = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}$ e $Y = (-1, 1)$.

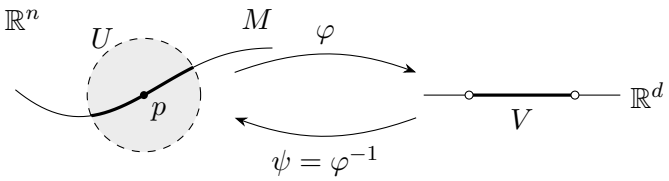


A aplicação

$$F\colon X \to Y, \qquad (x, y) \mapsto x$$

é um difeomorfismo (suave), com inversa $F^{-1}(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$.

Definição 18.7. Um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma *subvariedade de classe* C^k ($k \geqslant 1$) e *dimensão* d se, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de p tal que $M \cap U$ é difeomorfo (de classe C^k) a um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^d$.

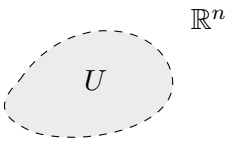


Um difeomorfismo $\varphi\colon M \cap U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ é dito uma *carta (local)*. O difeomorfismo inverso $\psi = \varphi^{-1}\colon V \subseteq \mathbb{R}^d \to M \cap U$ é dito uma *parametrização*. As componentes de uma carta local $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ são ditas *coordenadas locais*.

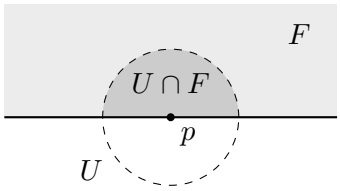
Observação 18.8.

- "M" vem de *Mannigfaltigkeit* (em inglês, *manifold*).
- "Carta" = mapa (cartografia).

Exemplo 18.9. Um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade suave de dimensão n (tome $\varphi = \mathrm{Id}_U : U \to U$).



Observação. O semiplano $F = \{(x, y) : y \geqslant 0\}$ *não* é uma variedade no sentido acima.



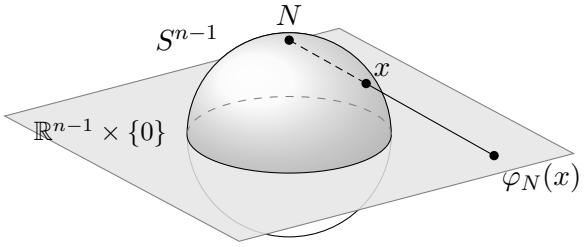
Se $p \in \partial F$ e $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança de p, então $U \cap F$ não é difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^d$ (para qualquer d). (Exercício!)

Observação 18.10. Veremos que F é uma "variedade com bordo".

Exemplo 18.11. A esfera

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

é uma variedade suave de dimensão $n - 1$. Seja $N = (0, 0, \ldots, 1) = e_n$ e considere a *projeção estereográfica*:



$$\varphi_N \colon S^{n-1} \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto \varphi_N(x),$$

onde $\varphi_N(x)$ é a interseção entre $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e a reta definida por N e x. Temos

$$\begin{aligned} N + t(x - N) &= (0, 0, \ldots, 1) + t(x_1, x_2, \ldots, x_n - 1) \\ &= (tx_1, tx_2, \ldots, 1 + t(x_n - 1)), \end{aligned}$$

que pertence a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ se, e somente se, $1 + t(x_n - 1) = 0$, ou seja,

$$t = \frac{1}{1 - x_n}.$$

Logo,

$$\varphi_N(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right).$$

Afirmação: $\varphi_N \colon S^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ é um difeomorfismo suave.

De fato, se $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 1\}$, então $S^{n-1} \cap U = S^{n-1} \setminus \{N\}$ e $\varphi_N \colon S^{n-1} \cap U \to \mathbb{R}^{n-1}$ se estende a uma aplicação suave $\tilde{\varphi}_N \colon U \to \mathbb{R}^{n-1}$ (dada pela mesma fórmula).

E a inversa? Temos

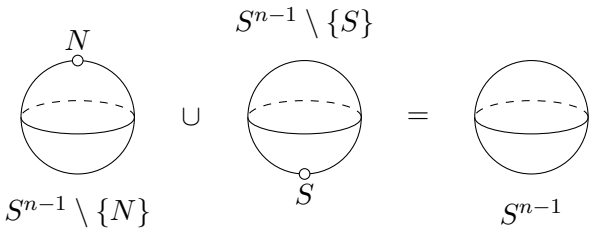
$$\begin{aligned} \varphi_N(x) = y &\iff \frac{x_i}{1 - x_n} = y_i, \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ &\implies \frac{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}{(1 - x_n)^2} = y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 \\ &\iff \frac{1 + x_n}{1 - x_n} = \frac{1 - x_n^2}{(1 - x_n)^2} = y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 \\ &\iff x_n = \frac{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - 1}{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\left(\text{e } 1 - x_n = \frac{2}{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 1} \right).$$

Assim,

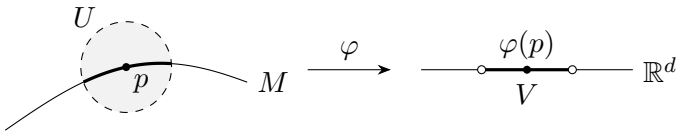
$$\varphi_N^{-1} \colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow S^{n-1} \cap U,$$
$$\varphi_N^{-1}(y) = \frac{1}{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + 1} (2y_1, \ldots, 2y_{n-1},\, y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - 1).$$

Consideramos também a projeção estereográfica análoga com respeito a $S = (0, 0, \ldots, -1) = -e_n$. As duas cartas cobrem a esfera:


N
$S^{n-1} \setminus \{N\}$
$\cup$
$S^{n-1} \setminus \{S\}$
S
$=$
S^{n-1}

19 22/05

Aula passada. Variedades: conjuntos que são "localmente $\mathbb{R}^d$". Mais precisamente, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é tal que, localmente, temos difeomorfismos $\varphi\colon U \cap M \to V \subseteq \mathbb{R}^d$.



Dizemos que φ é uma *carta local* e que φ^{-1} é uma *parametrização local*. Exemplo: $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$.

13) Variedades diferenciáveis (cont.)

Lema 19.1. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma variedade de classe C^k ($k \geqslant 1$) e dimensão d. Uma aplicação $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$, com $V \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto, tal que $\varphi(V) \subseteq M$ é uma parametrização local de M se, e somente se,*

(i) φ é uma imersão de classe C^k;

(ii) $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subseteq M$ é um homeomorfismo, onde M tem a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Por (i), $\varphi(V)$ é um aberto de M (se ψ é uma carta de M em torno de $\varphi(x)$, então $\psi \circ \varphi$ é uma aplicação entre abertos de $\mathbb{R}^d$ com derivada injetiva, logo um difeomorfismo local, de imagem aberta), isto é, existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que $\varphi(V) = U \cap M$. Assim, $\varphi\colon V \to U \cap M$ é uma bijeção. Resta ver que é um difeomorfismo (de classe C^k), no sentido da aula passada, isto é, que, localmente, φ^{-1} se estende a uma aplicação de classe C^k definida em um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Pela forma local das imersões, a menos de reduzir V e U, existe um difeomorfismo $G\colon U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que, para $x = (x_1, \ldots, x_d) \in V$,

$$G \circ \varphi(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0).$$

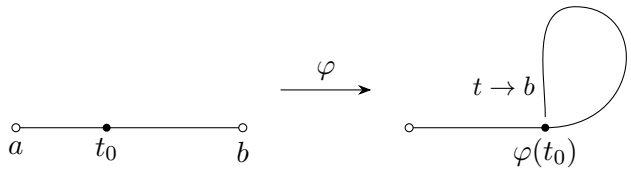
Logo, se $P\colon U' \to \mathbb{R}^d$ é a projeção $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_d)$, então

$$(P \circ G) \circ \varphi = \mathrm{Id}_V,$$

ou seja, $P \circ G$ é uma extensão de φ^{-1} a U. □

Observação.

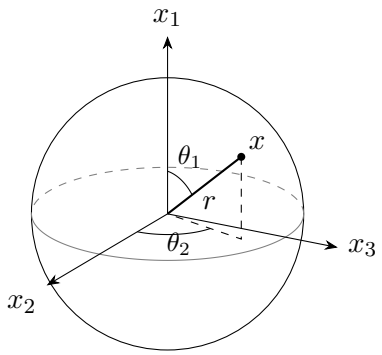
- A definição de variedade do Elon é a seguinte: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade se pode ser coberta por abertos U tais que $M \cap U$ é imagem de uma φ como no lema.
- O fato de φ ser uma imersão injetiva *não* garante que φ seja um homeomorfismo sobre a sua imagem:



Exemplo 19.2 ("Coordenadas esféricas" em $\mathbb{R}^n$)**.** Considere

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta_1) \\ x_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ x_3 = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2)\cos(\theta_3) \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}) \\ x_n = r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-2})\,\mathrm{sen}(\theta_{n-1}), \end{cases}$$

onde $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1, \ldots, \theta_{n-2} \leqslant \pi$ e $0 \leqslant \theta_{n-1} < 2\pi$. Para $n = 3$:

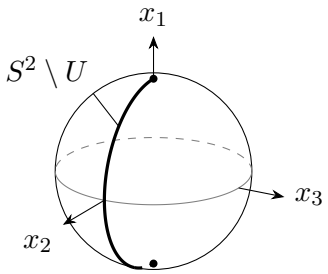


$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\theta_1) \\ x_2 &= r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ x_3 &= r\,\mathrm{sen}(\theta_1)\,\mathrm{sen}(\theta_2) \end{aligned}$$

Obtemos assim uma parametrização local de S^{n-1}:

$$\begin{aligned} \varphi\colon (0,\pi)^{n-2} \times (0,2\pi) &\longrightarrow U \cap S^{n-1} \\ (\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) &\longmapsto \big(\cos(\theta_1), \ldots, \mathrm{sen}(\theta_1)\cdots\mathrm{sen}(\theta_{n-1})\big). \end{aligned}$$

Para $n = 3$, temos $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{x : x_3 = 0,\ x_2 \geqslant 0\}$.



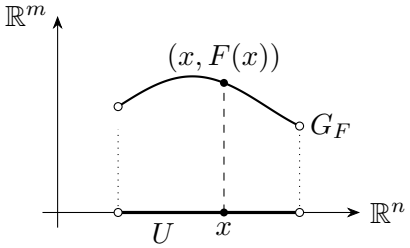
Exemplo 19.3 (Gráficos)**.** Se $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^k, o gráfico

$$G_F = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m : y = F(x)\}$$

é uma variedade de classe C^k e dimensão n. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi\colon U &\longrightarrow G_F \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \\ x &\longmapsto (x, F(x)) \end{aligned}$$

é uma parametrização (global); a carta correspondente é a projeção.



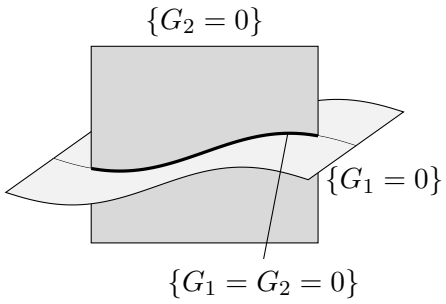
Exemplo 19.4 (Hipersuperfície definida por uma equação)**.** Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $g \in C^k(U)$ tal que $g(p) = 0 \Rightarrow dg(p) \neq 0$. Então

$$H = \{p \in U : g(p) = 0\}$$

(suponha $H \neq \emptyset$) é uma variedade de classe C^k e dimensão $n - 1$. Com efeito, pelo teorema da função implícita, H é localmente um gráfico!

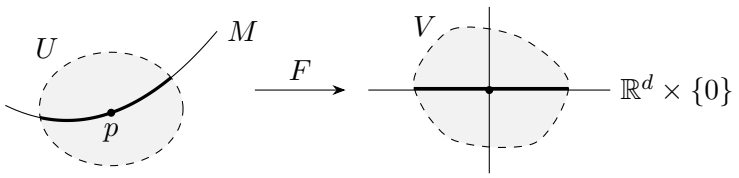
Exercício 19.5.

1. Mostre que, se $G\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão em todo ponto $p \in U$ tal que $G(p) = 0$, então $\{p \in U : G(p) = 0\}$ é uma variedade de dimensão $n - m$. ("Variedade definida pelas equações $G_1 = \cdots = G_m = 0$", com $dG_1, \ldots, dG_m$ linearmente independentes.)



2. (Definição do Spivak.) Mostre que $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão d se, e somente se, todo $p \in M$ admite uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $F\colon U \to V$ tal que

$$F(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) = \{y \in V : y_{d+1} = \cdots = y_n = 0\}.$$

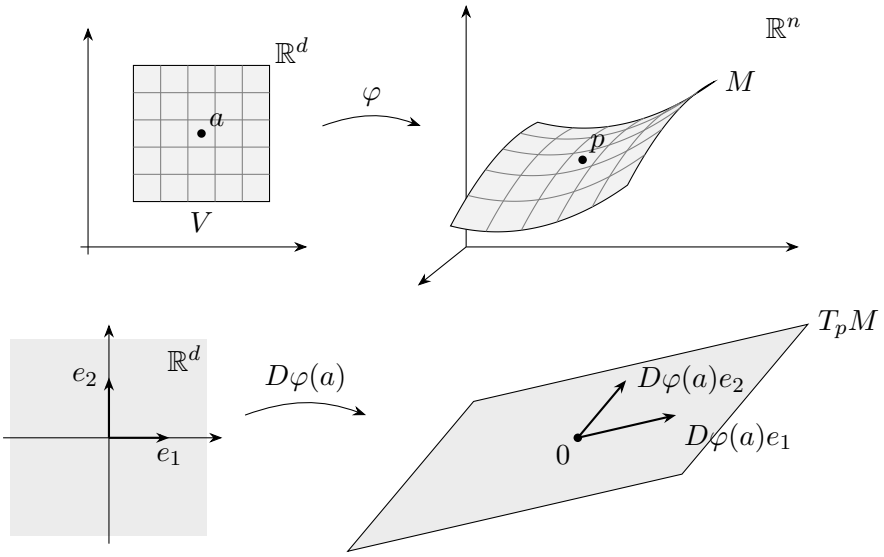


Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão d.

Definição 19.6. Dado $p \in M$, o *espaço tangente* a M em p é definido por

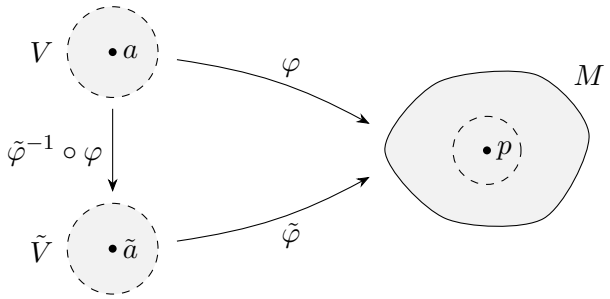
$$T_pM = \mathrm{Im}(D\varphi(a)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n),$$

onde $\varphi\colon V \subseteq \mathbb{R}^d \to U \cap M$ é uma parametrização local em p e $\varphi(a) = p$.

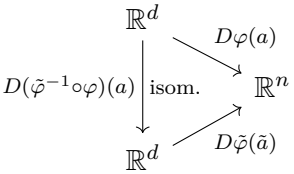


Observação. **Atenção:** T_pM é um subespaço vetorial! Seus elementos são as "direções tangentes". (O espaço afim $p+T_pM$ é o que de fato "tangencia" M em p.)

Observação 19.7. T_pM não depende da escolha da parametrização φ: se $\tilde{\varphi}\colon \tilde{V} \to \tilde{U} \cap M$ é uma outra parametrização, com $\tilde{\varphi}(\tilde{a}) = p$, então $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo de uma vizinhança de a em uma vizinhança de $\tilde{a}$



(composição de difeomorfismos é difeomorfismo); logo $D(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(a)$ é um isomorfismo, e temos o diagrama comutativo



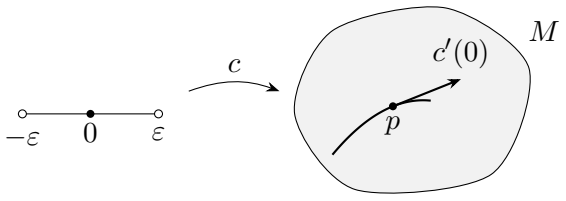
Logo, $D\varphi(a)$ e $D\tilde{\varphi}(\tilde{a})$ têm a mesma imagem.

Exercício 19.8.

1. Mostre que

   $$T_pM = \{c'(0) \in \mathbb{R}^n : c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^1,\ c(0) = p\}.$$

   (Isto também mostra que T_pM não depende da parametrização.)



2. Mostre que, se M é definida por $G = 0$ na vizinhança de p, onde $G\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão, então

   $$\begin{aligned} T_pM &= \operatorname{Ker}\big(DG(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\big) \\ &= \operatorname{Ker} dG_1(p) \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} dG_m(p). \end{aligned}$$

   (Cada $\operatorname{Ker} dG_i(p)$ é um hiperplano.)

20 27/05

Aula passada. Variedades via parametrizações locais ou equações.

Observação. Uma coleção $\{\varphi_i \colon V_i \to U_i \cap M\}_{i\in I}$ de cartas ou parametrizações locais tais que $M = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(V_i)$ é dita um *atlas* de M.

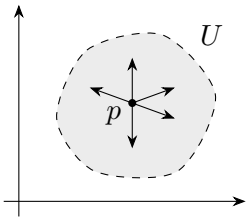
Espaço tangente:

$$T_pM = \operatorname{Im}(D\varphi(a)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(a) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}(a),$$

onde $\varphi\colon V \to U \cap M$ é uma parametrização local com $\varphi(a) = p$.

13) Variedades diferenciáveis (cont.): espaço tangente e aplicações diferenciáveis entre variedades

Exemplo 20.1. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto e $p \in U$, então $T_pU = \mathbb{R}^n$.



Exemplo 20.2. Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e tome $p \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : z = 0,\ y \geqslant 0\}$, com

$$p = \varphi(\theta_1, \theta_2) = (\cos\theta_1,\ \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2,\ \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2).$$

Temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} = (-\operatorname{sen}\theta_1,\ \cos\theta_1 \cos\theta_2,\ \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_2} = (0,\ -\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2,\ \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2),$$

e

$$T_pS^2 = \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1} \oplus \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_2}.$$

Note que

$$\begin{aligned}\left\langle p, \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}\right\rangle &= \cos\theta_1(-\operatorname{sen}\theta_1) + (\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2)(\cos\theta_1\cos\theta_2) \\ &\quad + (\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= -\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_1(\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2) = 0,\end{aligned}$$

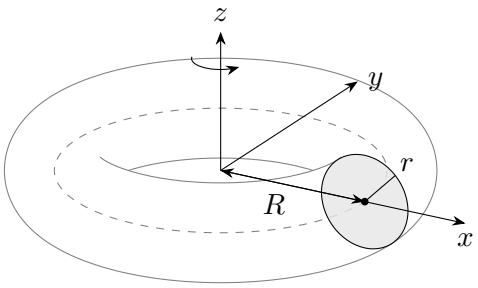
e, analogamente, $\left\langle p, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} \right\rangle = \cdots = 0$. Portanto

$$T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

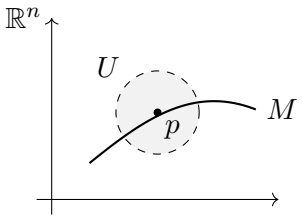
Isso é óbvio, pois S^2 é definida pela equação $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$; logo, $T_p S^2 = \operatorname{Ker} dg(p)$, onde

$$dg = 2(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Exercício 20.3. Determine uma parametrização do toro em $\mathbb{R}^3$ obtido pela revolução de um círculo de raio r e centro a uma distância R da origem. Calcule os espaços tangentes.



Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $N \subseteq \mathbb{R}^m$ variedades de classe C^k e $F\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k, isto é, todo $p \in M$ admite uma vizinhança U e uma extensão $\tilde{F}\colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k de $F|_{U \cap M}$ a U.

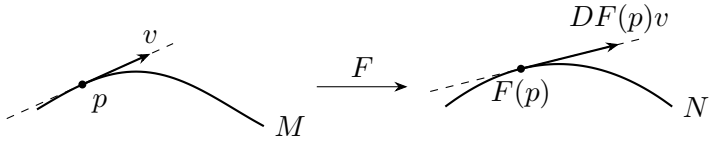


Exercício 20.4 (Definição do Elon)**.** Mostre que $F\colon M \to N$ é de classe C^k se, e somente se, $F \circ \varphi\colon V \to N \subseteq \mathbb{R}^m$ é de classe C^k para toda parametrização local $\varphi\colon V \to M \cap U$ de M.

Observação. Basta verificar isso para *um* atlas.

Definição 20.5. A *derivada* de $F\colon M \to N$ em p é a aplicação linear

$$\begin{aligned} DF(p)\colon T_p M &\longrightarrow T_{F(p)} N \\ v &\longmapsto D\tilde{F}(p)v. \end{aligned}$$



Lema 20.6. *A derivada $DF(p)$ não depende da escolha de $\tilde{F}$.*

Demonstração. Sejam $\varphi\colon V \to U \cap M$ e $\varphi'\colon V' \to U' \cap N$ parametrizações locais de M e N, com $p \in U$ e $\tilde{F}(U) \subseteq U'$.

$$\begin{array}{ccc} U \cap M & \xrightarrow{\tilde{F}} & U' \cap N \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\varphi'} \\ V & \xrightarrow[(\varphi')^{-1}\circ F\circ\varphi]{} & V' \end{array}$$

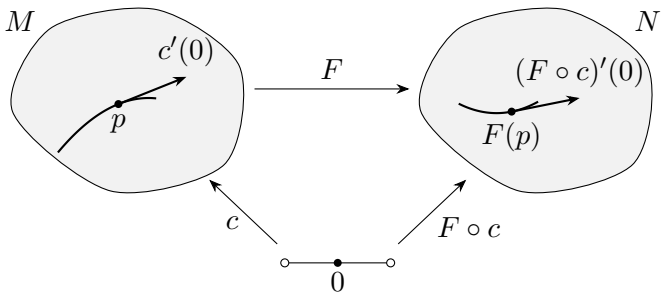
Note que $(\varphi')^{-1} \circ F \circ \varphi\colon V \to V'$ é uma aplicação suave. Pela regra da cadeia, temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D\tilde{F}(p)} & \mathbb{R}^m \\ {\scriptstyle D\varphi(a)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle D\varphi'(a')} \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow[D((\varphi')^{-1}\circ F\circ\varphi)(a)]{} & \mathbb{R}^{d'} \end{array} \qquad d = \dim M, \quad d' = \dim N.$$

Segue que $D\tilde{F}(p)$ leva $T_pM = \operatorname{Im} D\varphi(a)$ em $T_{F(p)}N = \operatorname{Im} D\varphi'(a')$. Além disso, $D\tilde{F}(p) \circ D\varphi(a) = D(F \circ \varphi)(a)$ só depende de F, e $D\varphi(a)$ é sobrejetiva sobre T_pM; logo $D\tilde{F}(p)|_{T_pM}$ não depende de $\tilde{F}$. □

Exercício 20.7. Mostre que, se $v = c'(0) \in T_pM$, onde $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é um caminho de classe C^k com $c(0) = p$, então

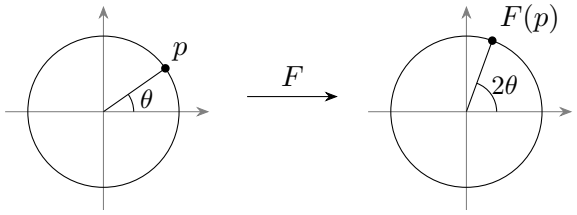
$$DF(p)c'(0) = (F \circ c)'(0).$$



Exemplo 20.8. Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e considere

$$\begin{aligned} F\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (x, y) &\longmapsto (x^2 - y^2,\ 2xy). \end{aligned}$$

Em coordenadas, $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \mapsto (\cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta)$; em notação complexa, $z = x + iy \mapsto z^2$.



Se $p = (a, b)$, temos $DF(p)\colon T_pS^1 \to T_{F(p)}S^1$. Uma extensão é $\tilde{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, definida em todo $\mathbb{R}^2$, e

$$D\tilde{F}(p)v = \begin{pmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} av_1 - bv_2 \\ bv_1 + av_2 \end{pmatrix}.$$

Note que $v \in T_pS^1 \iff av_1 + bv_2 = 0$, e então

$$\begin{aligned} &(a^2 - b^2)(av_1 - bv_2) + 2ab(bv_1 + av_2) \\ &\qquad = (a^2 - b^2)\, 2av_1 + 2a(b^2v_1 - a^2v_1) = 0, \end{aligned}$$

isto é, $D\tilde{F}(p)v \in T_{F(p)}S^1$, pois $F(p) = (a^2 - b^2, 2ab)$.

Façamos agora a conta via parametrizações locais. Se $p = (\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0)$, então $F(p) = (\cos(2\theta_0), \operatorname{sen}(2\theta_0))$, e temos

$$\begin{array}{ccc} (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in S^1 & \xrightarrow{\quad F \quad} & S^1 \ni (\cos\theta', \operatorname{sen}\theta') \\ \varphi\uparrow & & \uparrow\varphi' \\ \theta \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon) & \xrightarrow[(\varphi')^{-1}\circ F\circ\varphi]{} & (2\theta_0 - \varepsilon', 2\theta_0 + \varepsilon') \ni \theta' \end{array}$$

onde $(\varphi')^{-1} \circ F \circ \varphi\colon \theta \mapsto 2\theta$. Logo,

$$\begin{array}{ccc} T_pS^1 & \xrightarrow{DF(p)} & T_{F(p)}S^1 \\ {\scriptstyle D\varphi(\theta_0)}\uparrow \text{isom.} & & \text{isom.}\uparrow{\scriptstyle D\varphi'(2\theta_0)} \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array} \qquad v \longmapsto 2v,$$

ou seja, nessas coordenadas $DF(p)$ é a "multiplicação por 2".

Todas as propriedades de derivadas valem no contexto de variedades:

- **Regra da cadeia:** se $F\colon M \to N$ e $G\colon N \to P$ são aplicações de classe C^k, então

$$D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \circ DF(p) : \qquad \begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{DF(p)} & T_{F(p)}N \\ & {\scriptstyle D(G\circ F)(p)}\searrow & \downarrow{\scriptstyle DG(F(p))} \\ & & T_{G(F(p))}P \end{array}$$

- **Derivada da identidade:** para $\mathrm{Id}_M \colon M \to M$,

$$D\,\mathrm{Id}_M(p) = \mathrm{Id}_{T_pM} \colon T_pM \to T_pM.$$

- **Teorema da função inversa:** se $DF(p) \colon T_pM \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo, então $F \colon M \to N$ é um difeomorfismo local em p.

21 29/05

Aula passada. Se M, N são variedades, $F\colon M \to N$ e $p \in M$, temos a derivada $DF(p)\colon T_pM \to T_{F(p)}N$: "a derivada é uma transformação linear entre os espaços tangentes". Ela satisfaz propriedades análogas às da derivada de aplicações entre abertos.

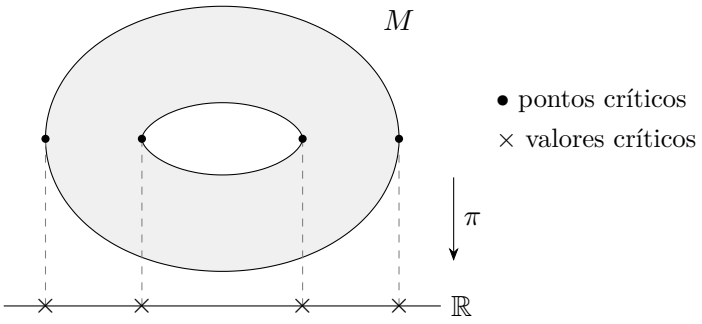
14) Valores regulares

Sejam M, N variedades de classe C^k ($k \geqslant 1$) e $F\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k.

Definição 21.1. Um ponto $p \in M$ é dito um *ponto regular* de $F\colon M \to N$ se F é uma *submersão em* p, isto é, se $DF(p)\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ é sobrejetiva. Se p não é regular, dizemos que p é um *ponto crítico* de F.

Observação. Se F admite um ponto regular, então $\dim M \geqslant \dim N$.

Exemplo 21.2. Considere a projeção de um toro M sobre uma reta:



Exemplo 21.3. Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície definida pela equação $g = 0$ e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função, então $p \in M$ é um ponto crítico de $f|_M\colon M \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\iff df(p)|_{T_pM}\colon T_pM \to \mathbb{R} \text{ não é sobrejetiva} \\
&\iff df(p)|_{T_pM} = 0 \iff T_pM \subseteq \operatorname{Ker} df(p) \\
&\iff \operatorname{Ker} dg(p) \subseteq \operatorname{Ker} df(p) \iff df(p) = \lambda\, dg(p)
\end{aligned}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ ("multiplicador de Lagrange").

Definição 21.4. Para M, N, F como na definição anterior, um ponto $q \in N$ é dito um *valor crítico* de $F\colon M \to N$ se é imagem de algum ponto crítico de F. Caso contrário, q é dito um *valor regular* de F.

Exemplo 21.5. No exemplo do toro, os pontos marcados com $\times$ são os valores críticos.

Observação. **Atenção:** um valor regular *não* é definido como a imagem de um ponto regular! É preciso que *todos* os pontos na fibra, $p \in F^{-1}(q)$, sejam regulares.

Observação. Se $F^{-1}(q) = \emptyset$, então q é valor regular!

Observação. Um conjunto da forma $F^{-1}(q)$ é dito uma *fibra* ou um *conjunto de nível*.

Teorema 21.6 (Fibras regulares)**.** *Se $q \in N$ é um valor regular de uma aplicação $F\colon M \to N$ de classe C^k ($k \geqslant 1$), então $F^{-1}(q) \subseteq M$ é uma variedade de classe C^k e dimensão*

$$\dim F^{-1}(q) = \dim M - \dim N.$$

Demonstração. Seja $p \in F^{-1}(q)$. Por hipótese, $DF(p)\colon T_pM \to T_qN$ é sobrejetiva. Logo, $\operatorname{Ker} DF(p)$ é um espaço vetorial de dimensão $\dim M - \dim N =: e$. Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$, considere uma aplicação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^e$ que induz um isomorfismo $L|_{\operatorname{Ker} DF(p)}\colon \operatorname{Ker} DF(p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^e$ e defina

$$\begin{aligned} G\colon M &\longrightarrow N \times \mathbb{R}^e \\ x &\longmapsto (F(x), L(x)), \end{aligned}$$

que é de classe C^k. Note que

$$DG(p)v = (DF(p)v, Lv) \in T_qN \times \mathbb{R}^e,$$

logo $DG(p)$ é injetiva e, portanto, um isomorfismo, por dimensão! Pelo teorema da função inversa, G é um difeomorfismo de uma vizinhança de $p \in M$ sobre uma vizinhança de $(q, L(p)) \in N \times \mathbb{R}^e$. Nesta vizinhança, $F^{-1}(q)$ corresponde, via G, a $\{q\} \times \mathbb{R}^e$, que é uma variedade de dimensão e. □

Exemplo 21.7. $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $n-1$, pois $1 \in \mathbb{R}$ é um valor regular de $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, e $S^{n-1} = g^{-1}(1)$.

Exemplo 21.8. Se $\dim M = \dim N$ e $q \in N$ é um valor regular de F, então $F^{-1}(q)$ é um conjunto *discreto* (uma variedade de dimensão 0). (Se M é compacta, $F^{-1}(q)$ é finito! Isso é usado para definir o "grau" de uma aplicação.)

Exercício 21.9. Verifique que $O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AA^t = A^tA = I\}$ é uma variedade compacta de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$ e calcule $T_IO(n)$. $O(n)$ é conexo?

Exercício 21.10 ("Fibras de posto constante")**.** Mostre que, se $F\colon M \to N$ tem posto constante r em uma vizinhança de $F^{-1}(q)$, então $F^{-1}(q)$ é uma variedade de dimensão $\dim M - r$.

O que podemos dizer sobre a existência de valores regulares?

Teorema 21.11 (Brown–Sard)**.** *Sejam M, N variedades de classe C^k e $F\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k ($k \geqslant 1$). Suponha que $k \geqslant \dim M - \dim N + 1$. Então o subconjunto dos valores regulares de F é* denso *em N.*

22 03/06

Aula passada.

- *Valores regulares* de $F\colon M \to N$: são os pontos $q \in N$ tais que $DF(p)\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ é sobrejetiva para todo $p \in F^{-1}(q)$.
- Se $q \in N$ é um valor regular, então $F^{-1}(q)$ é uma variedade, com $\dim F^{-1}(q) = \dim M - \dim N$.
- *Teorema de Brown–Sard*: se $k \gg 0$, então o conjunto

$$\{q \in N : q \text{ é valor regular de } F\colon M \to N\}$$

  é denso em N. (Observe que esse conjunto nem sempre é aberto!)

Teorema 22.1 (Sard)**.** *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k, com $k \geqslant \max\{n-m+1, 1\}$. Então o conjunto dos valores críticos de F tem* medida nula *em $\mathbb{R}^m$.*

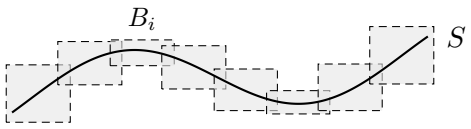
Vamos explicar o que significa ter medida nula.

Definição 22.2. Se $B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um bloco aberto, a sua *medida* (ou "volume") é

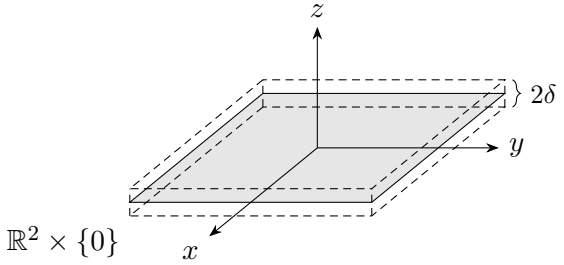
$$\mu(B) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Dizemos que um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tem *medida nula* se, para todo $\varepsilon > 0$, existem blocos abertos $B_0, B_1, B_2, \ldots$ tais que

- $S \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$;
- $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i) < \varepsilon$.



Exemplo 22.3. Se $n < m$, então $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ tem medida nula.



Exemplo 22.4. Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é enumerável, então S tem medida nula!

Exemplo 22.5. Pelo teorema de Sard, uma variedade $M \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimensão $< n$ tem medida nula. (Ou use que "a imagem de um conjunto de medida nula por uma aplicação localmente Lipschitz tem medida nula".)

Exercício 22.6. Mostre que, se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tem medida nula, então $\mathbb{R}^n \setminus S$ é denso.

Exercício 22.7. Leia o capítulo "Conjuntos de medida nula" no Elon, §6.2.

15) Formas alternadas

Objetivo: desenvolver uma teoria de integração em variedades. O que vamos integrar? Não funções, mas sim *formas diferenciais*.

A ideia básica é integrar em uma variedade via parametrizações locais. Mas a integral *não* pode depender da parametrização! Por exemplo, fazendo a mudança de variáveis $t = 2u$,

$$\int_a^b \underbrace{f(t)\,dt}_{\text{forma diferencial}} = \int_{a/2}^{b/2} f(2u)\,2\,du.$$

Informalmente: "forma diferencial = integrando que se transforma de maneira que a integral seja invariante por mudança de coordenadas".

Formalmente, uma forma diferencial ω em uma variedade M é uma associação

$$p \in M \;\rightsquigarrow\; \omega_p \text{ forma alternada em } T_pM$$

que varia diferenciavelmente com respeito a p. A forma alternada ω_p é a "versão linearizada (infinitesimal) de uma forma diferencial".

Definição 22.8. Uma *k-forma alternada* (ou forma alternada de *grau* k) em um espaço vetorial V é uma função

$$\alpha\colon V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que:

(i) α é k-linear (isto é, linear em cada "coordenada" V);

(ii) $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$ se $v_i = v_j$ para algum $i \neq j$.

Exemplo 22.9. Uma 1-forma alternada é o mesmo que um funcional linear $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ (a condição (ii) é vazia).

Exemplo 22.10. A aplicação

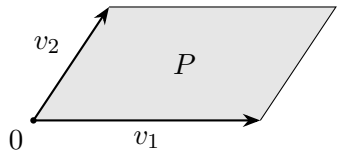
$$\det\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é uma 2-forma alternada em $\mathbb{R}^2$.

Observação 22.11 ($k = 0$). Temos $V^0 = \{0\}$ (espaço vetorial nulo). Uma 0-forma alternada é uma função $\alpha\colon \{0\} \to \mathbb{R}$, que se identifica com o número $\alpha(0) \in \mathbb{R}$.

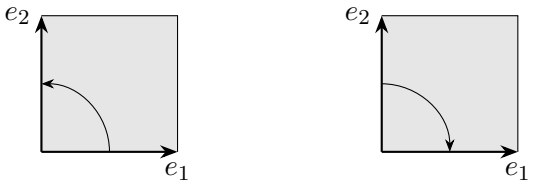
Intuição geométrica. Uma k-forma alternada é um dispositivo algébrico que atribui uma "medição" a todo paralelepípedo k-dimensional *orientado* em V,

$$P = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k \in V : 0 \leqslant t_i \leqslant 1\}.$$



Aqui $(v_1, \ldots, v_k)$ são os geradores de P, e a ordem dos v_i determina uma orientação.

Exemplo 22.12. Os pares (e_1, e_2) e (e_2, e_1) determinam o mesmo paralelepípedo em $\mathbb{R}^2$, mas com orientações opostas.



Propriedades de uma forma alternada: $\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ se comporta como um volume k-dimensional (com sinal). Por exemplo, se $v_i = v_j$, o paralelepípedo tem dimensão $< k$, e portanto seu volume é 0.

Lema 22.13. *Seja $\alpha\colon V^k \to \mathbb{R}$ uma forma alternada.*

(i) Se $1 \leqslant i < j \leqslant k$, então

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

(ii) Se $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes, então $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Demonstração. (i) Denote $\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \alpha(v_i, v_j)$. Temos

$$\begin{aligned} 0 = \alpha(v_i + v_j, v_i + v_j) &= \alpha(v_i, v_i) + \alpha(v_i, v_j) + \alpha(v_j, v_i) + \alpha(v_j, v_j) \\ &= \alpha(v_i, v_j) + \alpha(v_j, v_i). \end{aligned}$$

(ii) Podemos supor (usando (i)) que $v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$. Logo

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(\lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k, \ldots, v_k) = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \, \alpha(v_i, v_2, \ldots, v_k) = 0,$$

pois cada termo da soma tem um vetor repetido. □

Observação 22.14. O item (i) acima diz que formas alternadas são *antissimétricas*. Mais geralmente, se σ é uma permutação de $\{1, \ldots, k\}$, então

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_1, \ldots, v_k),$$

onde $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ é o *sinal* de σ:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n(\sigma)},$$

sendo $n(\sigma)$ o número de *transposições* (trocas de posição entre dois elementos de $\{1, \ldots, k\}$) necessárias até obter σ. Note que $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$.

Exemplo 22.15.

- Para $\sigma\colon (1,2,3) \mapsto (1,3,2)$, basta uma transposição (trocar 2 e 3), logo $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^1 = -1$.
- Para $\sigma\colon (1,2,3) \mapsto (2,3,1)$, usamos duas transposições:

  $$(1,2,3) \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} (2,1,3) \xrightarrow{1 \leftrightarrow 3} (2,3,1),$$

  logo $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1$.

23 05/06

Aula passada.

- k-forma alternada em V: $\alpha\colon V^k \to \mathbb{R}$ tal que (i) α é k-linear; (ii) $\alpha(v_1,\dots,v_k) = 0$ se $v_i = v_j$, $i \neq j$.
- Antissimetria: $\alpha(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\,\alpha(v_1,\dots,v_k)$, para σ permutação de $\{1,\dots,k\}$.

15) Formas alternadas (cont.)

Exercício 23.1 (Projetor alternado)**.** Mostre que, se $f\colon V^k \to \mathbb{R}$ é k-linear, então

$$Af\colon V^k \to \mathbb{R}, \qquad (v_1,\dots,v_k) \mapsto \frac{1}{k!}\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}),$$

onde a soma percorre todas as permutações de $\{1,\dots,k\}$, é uma k-forma alternada. Mostre que, se f é alternada, então $Af = f$.

Notação. $A^k(V) = \{\alpha\colon V^k \to \mathbb{R} : \alpha \text{ é } k\text{-forma alternada}\}$.

Note que $A^k(V)$ é um espaço vetorial!

Exemplo 23.2. $A^0(V) = \mathbb{R}$ e $A^1(V) = V^*$.

Exemplo 23.3. Se $\dim V = n$, então $A^k(V) = \{0\}$ para todo $k > n$ (segue do lema da aula passada, pois $k > n$ vetores são sempre linearmente dependentes).

Assim, os espaços não triviais de formas alternadas são

$$A^0(V) = \mathbb{R}, \quad A^1(V) = V^*, \quad A^2(V), \quad \dots, \quad A^n(V).$$

Definição 23.4. Se $T\colon V \to W$ é uma transformação linear e $\alpha \in A^k(W)$, o *pullback* de α por T é

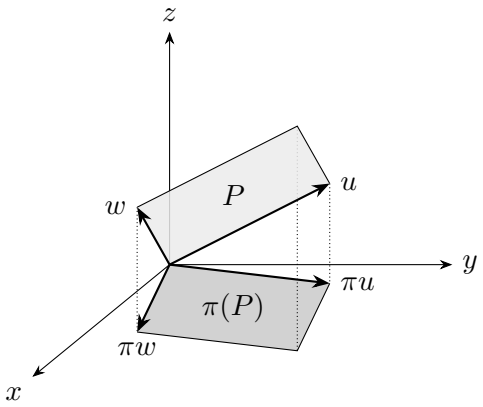
$$T^*\alpha\colon V^k \to \mathbb{R}, \qquad (v_1,\dots,v_k) \mapsto \alpha(Tv_1,\dots,Tv_k).$$

Note que $T^*\alpha \in A^k(V)$ e que o pullback é uma aplicação linear

$$T^*\colon A^k(W) \to A^k(V).$$

Exemplo 23.5. Seja $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$, e $\alpha = \det \in A^2(\mathbb{R}^2)$. Então $\pi^*\alpha \in A^2(\mathbb{R}^3)$ é dada por

$$\pi^*\alpha\big((x,y,z),(x',y',z')\big) = \alpha\big((x,y),(x',y')\big) = \det\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}.$$



(Pergunta da aula passada: considere os vetores $(1,0,1)$ e $(1,0,2)$.)

Definição 23.6. O *produto wedge* (ou *produto exterior*) de $\alpha \in A^p(V)$ e $\beta \in A^q(V)$ é

$$\alpha \wedge \beta \colon V^{p+q} \to \mathbb{R},$$

$$(v_1, \ldots, v_{p+q}) \mapsto \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\, \beta(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Note (exercício!) que $\alpha \wedge \beta \in A^{p+q}(V)$, e obtemos uma aplicação

$$A^p(V) \times A^q(V) \to A^{p+q}(V), \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta.$$

Exemplo 23.7. Se $\alpha_1, \alpha_2 \in A^1(V) = V^*$, então $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in A^2(V)$ e

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) - \alpha_1(v_2)\alpha_2(v_1) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 23.8. Seja (e_1, e_2) a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e (e_1^*, e_2^*) a base dual de $(\mathbb{R}^2)^*$. Então

$$A^0(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}, \qquad A^1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}e_1^* \oplus \mathbb{R}e_2^*, \qquad A^2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}\, e_1^* \wedge e_2^*.$$

De fato, se $\alpha \in A^2(\mathbb{R}^2)$, então $\alpha = \alpha(e_1, e_2)\, e_1^* \wedge e_2^*$.

Exemplo 23.9. Sejam $\alpha \in A^2(V)$ e $\beta \in A^1(V)$. Então

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2}\big(&\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1) \\ &- \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3) + \alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_3, v_2)\beta(v_1)\big) \\ = \alpha(v_1, v_2)&\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1). \end{aligned}$$

Teorema 23.10 (Propriedades de $\wedge$)**.** *Sejam $\alpha \in A^p(V)$, $\beta \in A^q(V)$, $\gamma \in A^r(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto $\wedge$ é:*

(i) bilinear (quando os graus permitem as somas, isto é, $p = q$ na primeira igualdade e $q = r$ na segunda):

$$(\alpha + \lambda\beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \lambda\, \beta \wedge \gamma, \qquad \alpha \wedge (\beta + \lambda\gamma) = \alpha \wedge \beta + \lambda\, \alpha \wedge \gamma;$$

(ii) anticomutativo: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\, \beta \wedge \alpha$*;*

(iii) associativo: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$*;*

(iv) compatível com pullback: $T^*(\alpha \wedge \beta) = T^*\alpha \wedge T^*\beta$*.*

Demonstração. Exercício! Algumas indicações:

(i) e (iv): aplicação direta da definição.

(ii): considere a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & \cdots & p+q \\ q+1 & q+2 & \cdots & q+p & 1 & \cdots & q \end{pmatrix}.$$

(iii): considere Af, onde

$$f(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\ = \alpha(v_1, \ldots, v_p)\, \beta(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q})\, \gamma(v_{p+q+1}, \ldots, v_{p+q+r}). \quad \square$$

Teorema 23.11. *Se $\ell_1, \ldots, \ell_n$ é uma base de $V^* = A^1(V)$, então, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$\ell_{i_1} \wedge \cdots \wedge \ell_{i_k}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,$$

é uma base de $A^k(V)$. Em particular,

$$\dim A^k(V) = \binom{n}{k}.$$

Exemplo 23.12. Seja e_1^*, e_2^*, e_3^* a base dual canônica de $(\mathbb{R}^3)^*$. Então

$$A^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R},$$
$$A^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}e_1^* \oplus \mathbb{R}e_2^* \oplus \mathbb{R}e_3^*,$$
$$A^2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}e_1^* \wedge e_2^* \oplus \mathbb{R}e_1^* \wedge e_3^* \oplus \mathbb{R}e_2^* \wedge e_3^*,$$
$$A^3(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}\, \underbrace{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*}_{\det}.$$

Observação 23.13. Se $n = \dim V$, então $A^n(V)$ sempre tem dimensão 1! Se $w_1, \ldots, w_n$ é uma base de V e $\omega \in A^n(V)$, então, para todos $v_1, \ldots, v_n$,

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det(a_{ij})\, \omega(w_1, \ldots, w_n), \qquad \text{onde } v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i.$$

(Em particular, se $T\colon V \to V$ é uma transformação linear, então $T^*\omega = \det(T)\, \omega$.)

16) Formas diferenciais

Seja M uma variedade de classe C^r ($r \geqslant 1$) e dimensão d. Se $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ é uma carta local de M (as $\varphi_i\colon U \to \mathbb{R}$ são as "funções coordenadas"), para todo $p \in U$ temos

$$d\varphi_1(p), \ldots, d\varphi_d(p) \in (T_pM)^* = A^1(T_pM).$$

Logo, pelo teorema anterior, uma base de $A^k(T_pM)$ é dada por

$$d\varphi_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}(p), \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d.$$

Definição 23.14. Uma *k-forma diferencial* (de classe C^{r-1}) ω em M é uma associação

$$p \in M \longmapsto \omega(p) \in A^k(T_pM)$$

tal que, para toda carta local $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d)\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ de M, as funções $f_{i_1,\ldots,i_k}\colon U \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}(p)\, d\varphi_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}(p)$$

são de classe C^{r-1}.

Observação. O expoente $r-1$ se deve ao seguinte: numa mudança de cartas $\psi \circ \varphi^{-1}$, que é de classe C^r, as formas $d\psi_j$ se escrevem como combinações das $d\varphi_i$ com coeficientes dados pelas derivadas parciais de $\psi \circ \varphi^{-1}$, que são de classe C^{r-1}.

Observação 23.15. Basta verificar a propriedade acima para um atlas. (Exercício!)

Notação.

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}\, d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

24 10/06

Aula passada.

- O espaço das k-formas alternadas $A^k(V)$:
  - (i) pullback: $T\colon W \to V$ induz $T^*\colon A^k(V) \to A^k(W)$;
  - (ii) produto $\wedge$ (wedge): $A^p(V) \times A^q(V) \to A^{p+q}(V)$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$, que é anticomutativo: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$. Em particular,

$$\boxed{\alpha \in A^1(V) \implies \alpha \wedge \alpha = 0}$$

    (cuidado, isso não vale para formas de grau par!);
  - (iii) se $\dim V = n$, então $\dim A^k(V) = \binom{n}{k}$ $(k \leqslant n)$, com base $\ell_{i_1} \wedge \cdots \wedge \ell_{i_k}$, $i_1 < \cdots < i_k$, onde $\ell_1, \ldots, \ell_n$ é uma base de $V^* = A^1(V)$.
- Uma k-forma diferencial ω em uma variedade M de classe C^r é uma associação $p \in M \mapsto \omega(p) \in A^k(T_pM)$ tal que, se $\varphi = (x_1, \ldots, x_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ é uma carta local,

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

  onde as $f_{i_1,\ldots,i_k}\colon U \to \mathbb{R}$ são de classe C^{r-1}.

16) Formas diferenciais (cont.)

De agora em diante, para simplificar, *tudo será* C^∞ (variedades, aplicações, formas diferenciais etc.).

Notação. $\Omega^k(M)$ denota o espaço vetorial das k-formas diferenciais em M.

Exemplo 24.1. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Então

$$\omega \in \Omega^k(U) \iff \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad f_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U),$$

onde $x_1, \ldots, x_n\colon U \to \mathbb{R}$ são as coordenadas canônicas. Lembre que $dx_i(p) = e_i^*$.

Exemplo 24.2. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto (com coordenada t). Então

$$\omega \in \Omega^1(I) \iff \omega = f(t)\, dt, \quad f \in C^\infty(I).$$

Exemplo 24.3. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto, com coordenadas x, y, z. Os elementos de $\Omega^k(U)$ são da forma:

$$\begin{aligned}
\Omega^0(U): &\quad f,\\
\Omega^1(U): &\quad f\,dx + g\,dy + h\,dz,\\
\Omega^2(U): &\quad f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge dz,\\
\Omega^3(U): &\quad f\,dx \wedge dy \wedge dz,
\end{aligned}$$

com $f, g, h \in C^\infty(U)$.

Exemplo 24.4. $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. (Uma 0-forma é só uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$.)

Exemplo 24.5. Se $f \in C^\infty(M)$, então $df \in \Omega^1(M)$. Note que, para todo $p \in M$,

$$df(p) \in (T_pM)^* = A^1(T_pM).$$

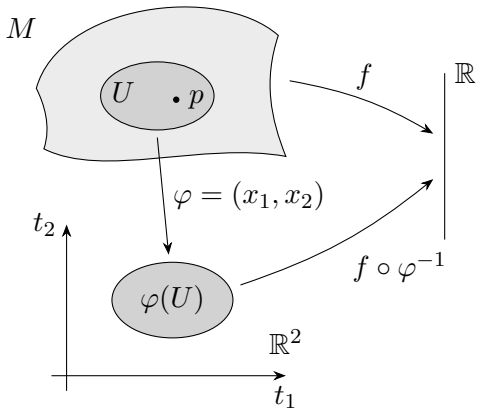
Se $\varphi = (x_1, \ldots, x_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ são coordenadas locais, então

$$df|_U = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i,$$

onde, por definição,

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(p) := \frac{\partial}{\partial t_i}(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

e $(t_1, \ldots, t_d)$ denotam as coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^d$.



Exercício 24.6. Mostre a fórmula acima. (É uma aplicação da regra da cadeia.)

Produto wedge ("ponto a ponto"):

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M), \qquad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta,$$

onde $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$.

Exemplo 24.7. Em $\mathbb{R}^2$:

$$(e^{x+y}\,dx + x\,dy) \wedge (y\,dx) = e^{x+y} y \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + xy\,dy \wedge dx = -xy\,dx \wedge dy.$$

Pullback. Uma aplicação suave $F\colon M \to N$ induz, para todo k,

$$F^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M), \qquad \omega \mapsto F^*\omega,$$

onde $(F^*\omega)(p) = DF(p)^*\,\omega(F(p))$.

Se $g \in \Omega^0(N) = C^\infty(N)$, então:

(i) $F^*g = g \circ F$;

(ii) $F^*(dg) = d(F^*g) = d(g \circ F)$. De fato,

$$F^*(dg)(p) = DF(p)^*\,dg(F(p)) = dg(F(p)) \circ DF(p) = d(g \circ F)(p)$$

pela regra da cadeia;

(iii) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta$.

Observação 24.8. Se $\varphi = (x_1, \ldots, x_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ e $\varphi' = (y_1, \ldots, y_e)\colon U' \to \mathbb{R}^e$ são coordenadas locais em M e N, respectivamente, tais que $F(U) \subseteq U'$, e $\omega|_{U'} = \sum g_{i_1,\ldots,i_k}\,dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$, então

$$(F^*\omega)|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} F^*g_{i_1,\ldots,i_k}\,d(F^*y_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(F^*y_{i_k}),$$

onde $d(F^*y_i) = \sum_j \frac{\partial(F^*y_i)}{\partial x_j}\,dx_j$, e então basta expandir.

Exemplo 24.9. Seja $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ e $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ um caminho suave, $c = (c_1, c_2)$. Então

$$c^*\omega = (f \circ c)\,dc_1 + (g \circ c)\,dc_2 = \big(f(c(t))\,c_1'(t) + g(c(t))\,c_2'(t)\big)\,dt.$$

Exemplo 24.10. Se $i\colon M \hookrightarrow N$ é uma inclusão e $\omega \in \Omega^k(N)$, denotamos $\omega|_M = i^*\omega$.

Exemplo 24.11. O "elemento de ângulo"

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

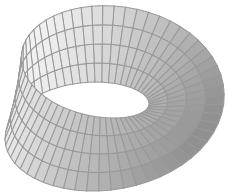
dá origem a $d\theta|_{S^1} \in \Omega^1(S^1)$.

Definição 24.12. Uma variedade M de dimensão d é *orientável* se existe $\omega \in \Omega^d(M)$, dita *forma de orientação*, tal que $\omega(p) \neq 0$ para todo $p \in M$.

Exemplo 24.13. $\mathbb{R}^n$ é orientável: tome $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Exemplo 24.14. S^1 é orientável: tome $\omega = d\theta$.

Exemplo 24.15. A faixa de Möbius *não* é orientável.





colar os lados com as setas

Duas formas de orientação $\omega, \omega' \in \Omega^d(M)$ são *equivalentes* se $\omega = f\,\omega'$ com $f > 0$. Uma *orientação* em M é uma classe de equivalência $[\omega]$ de formas de orientação.

Exercício 24.16. Mostre que, se M é conexa e orientável, existem apenas *duas* orientações.

Definição 24.17. Seja $(M \subseteq \mathbb{R}^n, [\omega])$ uma d-variedade orientada. A *forma volume* de M é a única d-forma ω_{vol} equivalente a ω tal que

$$\omega_{\text{vol}}(p)(w_1, \ldots, w_d) = 1$$

para qualquer base ortonormal (com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$) $w_1, \ldots, w_d$ de T_pM tal que $\omega(p)(w_1, \ldots, w_d) > 0$.

Observação 24.18. Isso não depende de $(w_1, \ldots, w_d)$, pois duas bases ortonormais (com a mesma orientação) diferem de uma isometria (matriz ortogonal).

25 12/06

Aula passada.

- $\Omega^k(M)$ denota o espaço das k-formas diferenciais em M: a cada $p \in M$ associamos $\omega(p) \in A^k(T_pM)$. Em coordenadas locais $\varphi = (x_1, \ldots, x_d)$,

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \qquad f_{i_1,\ldots,i_k} \in C^\infty(U).$$

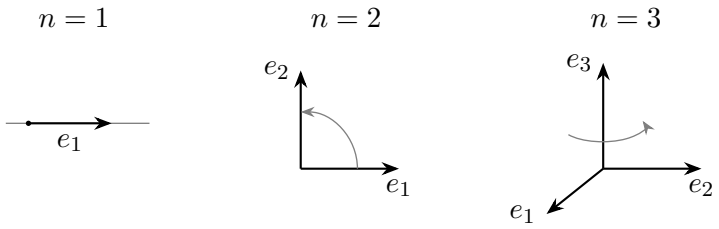
- Produto wedge e pullback (que generaliza a restrição).
- Forma volume: dada $(M, [\omega])$, com $M \subseteq \mathbb{R}^n$, a forma volume é a d-forma $\omega_{\text{vol}} \in \Omega^d(M)$ tal que $\omega_{\text{vol}} \in [\omega]$ e

$$\omega_{\text{vol}}(p)(w_1, \ldots, w_d) = 1$$

  para toda base ortonormal positiva $w_1, \ldots, w_d$ de T_pM (isto é, tal que $\omega(p)(w_1, \ldots, w_d) > 0$).

16) Formas diferenciais (cont.)

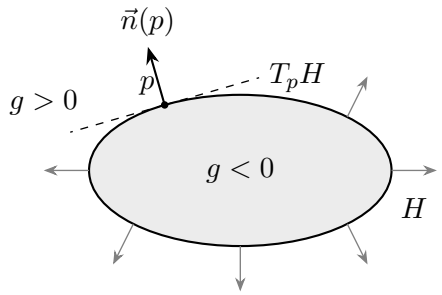
Exemplo 25.1. A forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ é a forma volume de $(\mathbb{R}^n, [dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n])$. Esta é a chamada "orientação positiva" de $\mathbb{R}^n$; para $n = 3$, é a orientação dada pela "regra da mão direita".



Exemplo 25.2. Se $H \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície definida pela equação $g = 0$, então H é orientável. De fato, seja

$$\vec{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}.$$

Para todo $p \in H$, $\vec{n}(p)$ é um vetor unitário ortogonal a T_pH ("campo de vetores normais a H").



A forma volume de H é

$$\omega_{\text{vol}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, n_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \Big|_H,$$

onde $n_i = \frac{\partial g}{\partial x_i} / \|\nabla g\|$ é a i-ésima componente de $\vec{n}$, e o chapéu indica que dx_i foi omitido.

Note que, se $v_2, \ldots, v_n \in T_pH$, então

$$\omega_{\text{vol}}(p)(v_2, \ldots, v_n) = \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{n}(p) & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

(pela fórmula de Laplace, expandindo na primeira coluna).

Exemplo 25.3 (Forma volume de $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$)**.** Tomando $g(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$, temos $\vec{n}(x) = x/\|x\|$ (note que $\vec{n}(x) = x$ se $x \in S^{n-1}$). Logo

$$\omega_{\text{vol}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \Big|_{S^{n-1}}.$$

Exercício 25.4. Calcule o pullback de ω_{vol} pela parametrização por coordenadas esféricas. (Por exemplo, para $n = 2$, temos $\varphi^*(x\, dy - y\, dx) = d\theta$, onde $\varphi(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.)

17) Derivada exterior

A derivada exterior responde à pergunta: "como derivar uma forma diferencial?"

Ideia: estender

$$d\colon C^\infty(M) = \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M), \qquad f \longmapsto df,$$

para operadores lineares

$$d\colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M), \qquad \omega \longmapsto d\omega. \tag{A}$$

Teorema 25.5. *Existe uma única família de operadores lineares* (A)*, para toda variedade M e todo $k \in \mathbb{N}$, tais que:*

(i) (Derivada de funções) Se $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, então df é a diferencial de f.

(ii) (Regra de Leibniz com sinal) Se $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\eta \in \Omega^q(M)$, então

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \, \omega \wedge d\eta.$$

(iii) ($d^2 = 0$) Se $\omega \in \Omega^k(M)$, então $d(d\omega) = 0$.

(iv) (Compatibilidade com pullback, ou "naturalidade") Dados $F\colon M \to N$ e $\omega \in \Omega^k(N)$, então

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

Exemplo 25.6. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $\omega \in \Omega^k(U)$,

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k} \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Então

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} d(f_{i_1,\ldots,i_k} \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) && \text{(linearidade)} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \Big(df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &\qquad + f_{i_1,\ldots,i_k} \underbrace{d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})}_{=0} \Big) && \text{(ii)} \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_i \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i} \, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} && \text{(i)} \end{aligned}$$

onde o termo $d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$ se anula por (ii) e (iii).

Observação 25.7. Resumindo: em coordenadas locais, e usando a notação de multi-índice $I = (i_1, \ldots, i_k)$,

$$d\Big(\sum_I f_I \, dx_I \Big) = \sum_I df_I \wedge dx_I.$$

Exemplo 25.8 (Por que $d^2 = 0$?)**.** Seja $f \in C^\infty(U)$. Então $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \in \Omega^1(U)$ e

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \Big) = \sum_{i=1}^n d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \, dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{i<j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)}_{=0} dx_i \wedge dx_j, \end{aligned}$$

e a expressão entre parênteses é nula pelo teorema de Schwarz!

Exemplo 25.9. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Então

$$\begin{aligned} d(f\,dx + g\,dy) &= df \wedge dx + dg \wedge dy \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\Big) \wedge dx + \Big(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\Big) \wedge dy \\ &= \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Exemplo 25.10. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Então:

- $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$;
- $d(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$ é igual a

$$\Big(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\Big)dy \wedge dz + \Big(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\Big)dz \wedge dx + \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)dx \wedge dy;$$

- $d(f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\Big)dx \wedge dy \wedge dz.$

Observação 25.11. Fazendo as identificações

$$\begin{aligned} &\Omega^1(U) \cong C^\infty(U;\mathbb{R}^3), \quad F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \mapsto (F_1, F_2, F_3), \\ &\Omega^2(U) \cong C^\infty(U;\mathbb{R}^3), \quad F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy \mapsto (F_1, F_2, F_3), \\ &\Omega^3(U) \cong C^\infty(U), \qquad f\,dx \wedge dy \wedge dz \mapsto f, \end{aligned}$$

obtemos, pelo exemplo anterior, o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U) \\ \wr & & \wr & & \wr & & \wr \\ C^\infty(U) & \xrightarrow[\nabla]{} & C^\infty(U;\mathbb{R}^3) & \xrightarrow[\mathrm{rot}]{} & C^\infty(U;\mathbb{R}^3) & \xrightarrow[\mathrm{div}]{} & C^\infty(U) \end{array}$$

e $d^2 = 0$ equivale a

$$\begin{cases} \mathrm{rot} \circ \nabla = 0, \\ \mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0. \end{cases}$$

Definição 25.12. Uma k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ é dita:

(i) *exata* se existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$;

(ii) *fechada* se $d\omega = 0$.

Note que mostrar que uma forma é exata é "resolver" uma equação diferencial (isto é, "integrar").

Exemplo 25.13. Uma 1-forma $\omega = f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$ é exata se admite uma "primitiva":

$$\omega = df \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = f_1, \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = f_n. \end{cases}$$

Note que $d^2 = 0$ implica que toda forma exata é fechada.

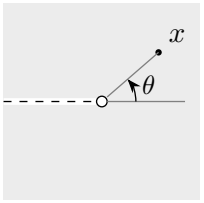
Observação (Atenção!). A volta não vale em geral: isso tem a ver com a *topologia* de M!

Exemplo 25.14. A forma

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

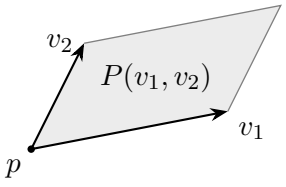
é fechada (exercício), mas não é exata. (Porém, é exata em abertos da forma $\mathbb{R}^2 \setminus$ (semirreta partindo de 0); uma primitiva é dada por uma determinação contínua do ângulo θ, que localmente, onde $x \neq 0$, é da forma $\operatorname{arctg}(y/x) +$ constante.)

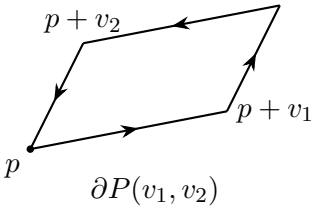
$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
$d\theta$ fechada, não exata



$\mathbb{R}^2 \setminus$ (semirreta)
$d\theta$ exata

Interpretação geométrica da derivada exterior. Se ω é uma 1-forma, então $d\omega$ é uma 2-forma. Dados p e vetores v_1, v_2, considere o paralelogramo $P(v_1, v_2)$ com vértice p gerado por v_1, v_2 (um "incremento"), e seu bordo orientado $\partial P(v_1, v_2)$:





$\partial P(v_1, v_2)$

Então

$$\int_{\partial P(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2)} \omega = \varepsilon^2 \, d\omega(p)(v_1, v_2) + o(\varepsilon^2).$$

Isto é, $d\omega(p)(v_1, v_2)$ mede a "circulação infinitesimal" de ω ao longo do bordo do paralelogramo gerado por v_1 e v_2. Essa interpretação, que pode inclusive ser tomada como definição da derivada exterior, é explicada no livro de V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (2ª ed., Graduate Texts in Mathematics 60, Springer, 1989), capítulo 7.

26 17/06

18) Integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$

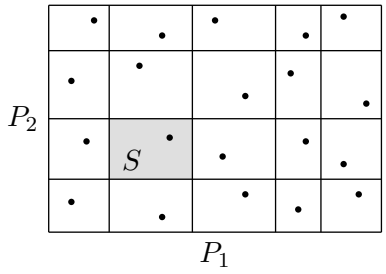
Este tópico trata das "integrais múltiplas". Seja $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ um bloco fechado e $f\colon B \to \mathbb{R}$ uma função. Nosso objetivo é definir

$$\int_B f = \int_B f(x)\,dx = \int_B f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n.$$

Definição 26.1. Uma *partição* $P = (P_1, \ldots, P_n)$ de B é uma partição P_i de $[a_i, b_i]$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Um *subbloco* de B é um bloco da forma

$$S = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

onde I_i é um subintervalo de P_i. Notação: $S \in P$.



O *diâmetro* de P é

$$d(P) = \max\{\operatorname{diam}(S) : S \in P\},$$

onde $\operatorname{diam}(S) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in S\}$.

Uma *partição pontilhada* (P, x^*) é uma partição P junto com pontos $x_S^* \in S$ para todo $S \in P$.

Definição 26.2. Uma função *limitada* $f\colon B \to \mathbb{R}$ é *(Riemann-)integrável* se o limite abaixo, dito *integral de Riemann*, existe:

$$\int_B f(x)\,dx := \lim_{d(P)\to 0} \underbrace{\sum_{S\in P} f(x_S^*)\,\mu(S)}_{\text{"soma de Riemann"}}.$$

Observação 26.3. A hipótese "limitada" é *necessária* para a integrabilidade (exercício!).

Observação 26.4. Somas de Darboux:

$$L(f, P) = \sum_{S\in P} \Big(\inf_{x\in S} f(x)\Big)\mu(S), \qquad U(f, P) = \sum_{S\in P} \Big(\sup_{x\in S} f(x)\Big)\mu(S).$$

Critério de Darboux: f (limitada) é (Riemann-)integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe P tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Nesse caso,

$$\underline{\int_B} f(x)\,dx := \sup_P L(f,P) = \int_B f(x)\,dx = \inf_P U(f,P) =: \overline{\int_B} f(x)\,dx.$$

Teorema 26.5.

(1) As funções integráveis em B formam um espaço vetorial, e

$$\int_B (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_B f(x)\,dx + \lambda \int_B g(x)\,dx.$$

(2) Se f é integrável, então $|f|$ é integrável e vale

$$\left|\int_B f(x)\,dx\right| \leqslant \int_B |f(x)|\,dx.$$

(3) Se f é contínua, então f é integrável.

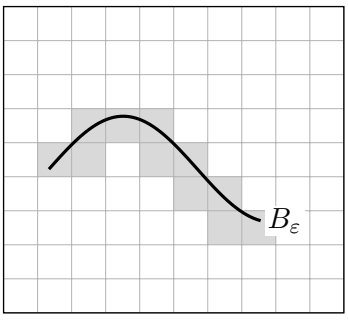
Demonstração. Exercício (tudo é igual ao caso de uma variável). □

Teorema 26.6 (Lebesgue)**.** *Uma função limitada $f\colon B \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se,*

$$\operatorname{discont}(f) = \{x \in B : f \text{ é descontínua em } x\}$$

tem medida nula. ("Integrável $\iff$ contínua q.t.p.")

Ideia da demonstração ($\Leftarrow$). Seja $B_\varepsilon = \{x \in B : \omega(f;x) \geqslant \varepsilon\}$, onde $\omega(f;x)$ é a oscilação de f em x. Como $\mu(B_\varepsilon) = 0$, podemos cobrir B_ε por blocos de volume total $< \varepsilon$; daí obtemos uma partição P tal que $\omega(f;x) < \varepsilon$ fora desses blocos...



□

Exemplo 26.7. Se $f, g\colon B \to \mathbb{R}$ são integráveis, então $f \cdot g$ é integrável, pois

$$\operatorname{discont}(f \cdot g) \subseteq \operatorname{discont}(f) \cup \operatorname{discont}(g).$$

Exemplo 26.8. Dado $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, seja $\chi_Y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a "função característica" de Y:

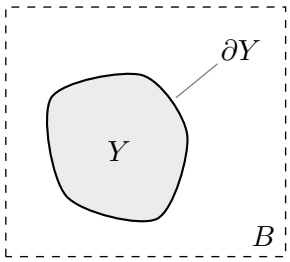
$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \notin Y, \\ 1, & x \in Y. \end{cases}$$

Note que $\operatorname{discont}(\chi_Y) = \partial Y$. Logo, χ_Y é integrável se, e somente se, ∂Y tem medida nula (por exemplo, se ∂Y é uma variedade de dimensão $< n$, pelo teorema de Sard).

Definição 26.9. Se Y é limitado e ∂Y tem medida nula, Y é dito *Jordan-mensurável* e definimos

$$\mu(Y) = \int_B \chi_Y(x)\,dx$$

(o "conteúdo" ou "medida de Jordan" de Y), onde B é qualquer bloco contendo Y.



Notação:

$$\int_Y f(x)\,dx = \int_B f(x)\chi_Y(x)\,dx.$$

Exercício 26.10.

(1) Mostre que, se Y_1, Y_2 são Jordan-mensuráveis e $\mu(Y_1 \cap Y_2) = 0$, então

$$\int_{Y_1 \cup Y_2} f(x)\,dx = \int_{Y_1} f(x)\,dx + \int_{Y_2} f(x)\,dx.$$

(2) Mostre que, se $f \geqslant 0$ em Y e $\int_Y f(x)\,dx = 0$, então $f = 0$ q.t.p. em Y.

Teorema 26.11 (Fubini)**.** [4] *Sejam $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $B_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ blocos fechados e $f\colon B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$ integrável. Então*

$$\int_{B_1 \times B_2} f(x,y)\,\underbrace{d(x,y)}_{dx\,dy} = \int_{B_1} \Big(\int_{B_2} f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_{B_2} \Big(\int_{B_1} f(x,y)\,dx \Big) dy.$$

[4] Versão do livro do Zorich [5].

Observação 26.12. Se $y \mapsto f(x,y)$ não é integrável, $\int_{B_2} f(x,y)\,dy$ denota *qualquer* valor entre $\underline{\int_{B_2}} f(x,y)\,dy$ e $\overline{\int_{B_2}} f(x,y)\,dy$.

Demonstração. Se P_i é uma partição de B_i, então $P = P_1 \times P_2$ é uma partição de $B_1 \times B_2$, e $\mu(S_1 \times S_2) = \mu(S_1)\mu(S_2)$. Assim,

$$\begin{aligned}
L(f,P) &= \sum_{S_1\times S_2} \Big(\inf_{S_1\times S_2} f(x,y)\Big)\mu(S_1\times S_2) \\
&\leqslant \sum_{S_1}\Big(\sum_{S_2} \inf_{x\in S_1}\Big(\inf_{y\in S_2} f(x,y)\Big)\mu(S_2)\Big)\mu(S_1) \\
&\leqslant \sum_{S_1} \inf_{x\in S_1}\Big(\sum_{S_2} \inf_{y\in S_2} f(x,y)\,\mu(S_2)\Big)\mu(S_1) \\
&\leqslant \sum_{S_1} \inf_{x\in S_1}\Big(\int_{B_2} f(x,y)\,dy\Big)\mu(S_1) \\
&\leqslant \sum_{S_1} \sup_{x\in S_1}\Big(\int_{B_2} f(x,y)\,dy\Big)\mu(S_1) \\
&\leqslant U(f,P).
\end{aligned}$$

Tomando $d(P) \to 0$, obtemos o resultado. □

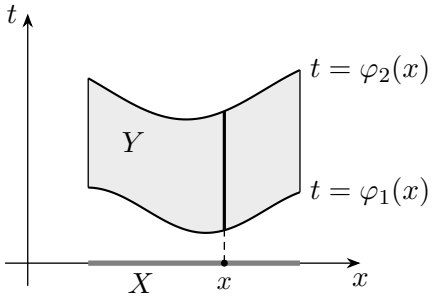
Exercício 26.13. Mostre que, se $f\colon B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$ é integrável, então $\int_{B_2} f(x,y)\,dy$ e $\int_{B_1} f(x,y)\,dx$ existem q.t.p.

Exemplo 26.14. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-mensurável e $\varphi_1, \varphi_2\colon X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então

$$Y = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leqslant t \leqslant \varphi_2(x)\}$$

é Jordan-mensurável e

$$\int_Y f(x,t)\,d(x,t) = \int_X \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,t)\,dt\Big)dx.$$



Se $f \equiv 1$, obtemos

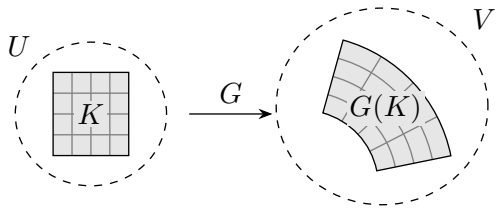
$$\mu(Y) = \int_X (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx.$$

Exemplo 26.15. Seja $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$. Então

$$\mu(D_r) = \int_{-r}^{r} \Big(\sqrt{r^2 - y^2} - \big(-\sqrt{r^2 - y^2}\big)\Big) dy = \cdots = \pi r^2.$$

Teorema 26.16 (Mudança de variável para compactos)**.** *Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos e $G\colon U \to V$ um difeomorfismo (de classe C^1). Seja $K \subseteq U$ um compacto Jordan-mensurável e $f\colon G(K) \to \mathbb{R}$ integrável. Então $f \circ G\colon K \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{G(K)} f(y)\, dy = \int_K (f \circ G)(x)\, |\det JG(x)|\, dx.$$



Observação 26.17. Em uma variável:

$$\int_{G([a,b])} f(y)\, dy = \int_{[a,b]} (f \circ G)(x)\, |G'(x)|\, dx$$

(note o módulo!). É a mesma fórmula do Cálculo 1 (sem módulo), pois, denotando por $[a, b]$ o intervalo de extremos a e b,

$$\int_{[a,b]} h(t)\, dt = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b h(t)\, dt, & a \leqslant b, \\ \displaystyle -\int_a^b h(t)\, dt, & b \leqslant a. \end{cases}$$

Corolário 26.18. *Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é Jordan-mensurável e $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear, então*

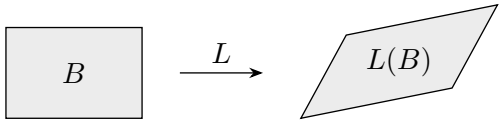
$$\mu(L(Y)) = |\det L|\, \mu(Y).$$

Demonstração. Se L não é isomorfismo, então $\mu(L(Y)) = 0$. Se L é isomorfismo e K é um compacto Jordan-mensurável contendo Y, então

$$\mu(L(Y)) = \int_{L(K)} \chi_{L(Y)}(y)\, dy = \int_K \underbrace{\chi_{L(Y)} \circ L(x)}_{=\chi_Y(x)} |\det L|\, dx = |\det L|\, \mu(Y).$$

□

Observação 26.19. Na verdade, a demonstração do teorema de mudança de variável consiste, primeiro, em demonstrar o resultado acima para um bloco B:



27 24/06

Aula passada.

- Integral de Riemann em $\mathbb{R}^n$: $\int_B f = \int_B f(x)\,dx$, onde B é um bloco fechado.
- Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ é Jordan-mensurável, definimos $\int_Y f(x)\,dx$.
- Teoremas: (1) Lebesgue; (2) Fubini; (3) Mudança de variáveis:

$$\int_{G(K)} f(y)\,dy = \int_K (f \circ G)(x)\,|\det JG(x)|\,dx$$

  (G difeomorfismo, K compacto Jordan-mensurável).

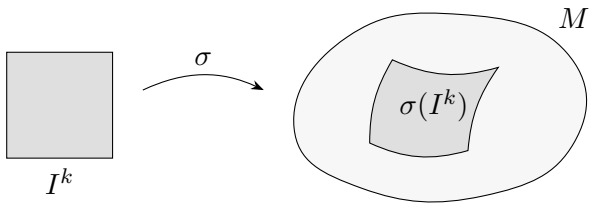
19) Integrais de formas diferenciais em cadeias

Notação: $I = [0,1]$.

Definição 27.1. Seja M uma variedade. Um *k-bloco singular* em M é uma aplicação de classe C^∞

$$\sigma\colon I^k \to M.$$

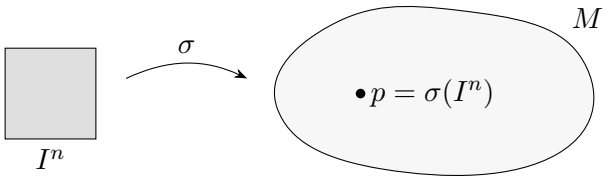
(Também diremos *k-cubo singular*.)



Exemplo 27.2 (n-bloco singular padrão em $\mathbb{R}^n$)**.** A inclusão $\mathrm{Id}_{I^n}\colon I^n \to I^n \subseteq \mathbb{R}^n$ é um n-bloco singular em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 27.3. Um 1-bloco singular $c\colon I \to M$ é um caminho C^∞ (não necessariamente injetivo).

Observação 27.4. O bloco singular é a *aplicação*, e não a sua imagem. Por exemplo, dado $p \in M$, a aplicação constante $\sigma\colon I^n \to M$, $\sigma(x) = p$ para todo $x \in I^n$, é um n-bloco singular.



Definição 27.5. Se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\sigma\colon I^k \to M$ é um k-bloco singular, então

$$\sigma^*\omega = f(x)\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

para alguma função f (definida em uma vizinhança de I^k), e definimos

$$\int_\sigma \omega = \int_{I^k} f(x)\,dx.$$

Exemplo 27.6 (Integral de linha)**.** Sejam $c\colon I \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\omega = f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n$. Denotando por t a variável em I, temos

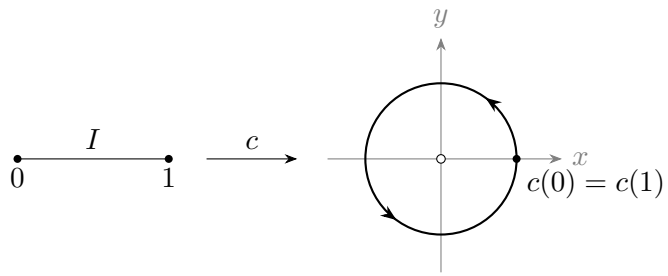
$$c^*\omega = \big((f_1 \circ c)(t)\,c_1'(t) + \cdots + (f_n \circ c)(t)\,c_n'(t)\big)\,dt,$$

logo

$$\int_c \omega = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n (f_i \circ c)(t)\,c_i'(t)\Big)\,dt.$$

Exemplo 27.7. Sejam $c(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ e

$$\omega = d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$



Então

$$\begin{aligned}\int_c \omega &= \int_0^1 \big(\cos(2\pi t)\,2\pi\cos(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t)\,2\pi\operatorname{sen}(2\pi t)\big)\,dt \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Observação 27.8. Um 0-cubo singular em M é (identificado com) um ponto $p \in M$. Se $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, então $\int_p f = f(p)$.

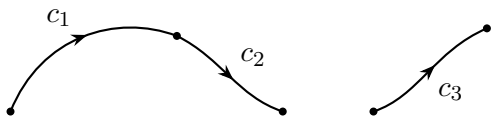
Definição 27.9. Uma *cadeia* de k-cubos singulares em M (ou uma *k-cadeia*) é uma expressão da forma

$$c = n_1\sigma_1 + \cdots + n_r\sigma_r,$$

onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_i\colon I^k \to M$ são k-cubos singulares ("combinação formal de cubos singulares com coeficientes inteiros").

Observação 27.10. Formalmente, o conjunto das k-cadeias é o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto dos k-cubos singulares.

Exemplo 27.11. Considere os caminhos c_1, c_2, c_3 abaixo e a 1-cadeia $c = 2c_1 + c_2 - c_3$.

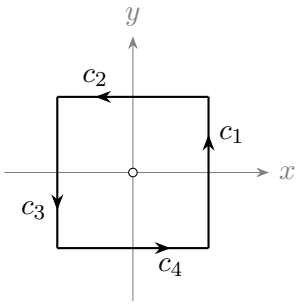


Pense: "percorrer c_1 duas vezes, c_2 uma vez e c_3 uma vez em sentido contrário".

Se $c = \sum_i n_i \sigma_i$ é uma cadeia, definimos

$$\int_c \omega = \sum_i n_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Exemplo 27.12. Sejam c_1, c_2, c_3, c_4 os quatro lados de um quadrado centrado na origem, percorridos no sentido anti-horário, e $\omega = d\theta = (x\,dy - y\,dx)/(x^2 + y^2)$.



Então

$$\int_{c_1+c_2+c_3+c_4} \omega = \int_{c_1} \omega + \cdots + \int_{c_4} \omega = \cdots = 2\pi \quad \text{(Verifique!)}.$$

Definição 27.13. Se $\sigma\colon I^k \to M$ é um k-cubo singular, o *bordo* de σ é a $(k-1)$-cadeia

$$\partial\sigma = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (\sigma_{(i,0)} - \sigma_{(i,1)}),$$

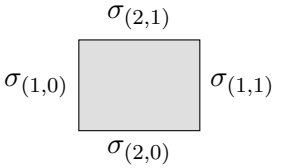
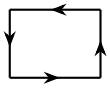
onde, para $j \in \{0, 1\}$, $\sigma_{(i,j)}\colon I^{k-1} \to M$ é dado por

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}) \longmapsto \sigma(x_1, \ldots, x_{i-1}, j, x_i, \ldots, x_{k-1}).$$

Se $c = \sum_i n_i \sigma_i$ é uma k-cadeia, definimos

$$\partial c = \sum_i n_i\, \partial\sigma_i.$$

Exemplo 27.14.

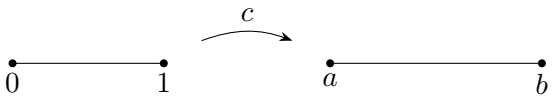
	$\sigma\colon I^k \to M$	$\partial\sigma$
$k=0$	$\bullet\,\sigma(0)$	0
$k=1$		$\sigma(1)-\sigma(0)$
$k=2$		$\sigma_{(2,0)}+\sigma_{(1,1)}-\sigma_{(2,1)}-\sigma_{(1,0)}$ 

Exercício 27.15. Mostre que, se c é uma k-cadeia, então $\partial(\partial c) = 0$ (ou seja, $\partial^2 = 0$). (Ver Spivak.)

Teorema 27.16 (Stokes, v1)**.** *Seja M uma variedade. Se $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e c é uma k-cadeia em M, então*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Exemplo 27.17. Em $\mathbb{R}$: seja $c\colon I \to [a,b]$, $t \mapsto a(1-t)+bt$.



Se $\omega = f$, então $d\omega = f'(t)\,dt$ e

$$\begin{aligned}\int_c d\omega &= \int_0^1 c^*(d\omega) = \int_0^1 d(f\circ c) = \int_0^1 (f\circ c)'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 f'(c(t))\,c'(t)\,dt \overset{u=c(t)}{=} \int_a^b f'(u)\,du.\end{aligned}$$

Por outro lado, $\partial c = b - a$ e

$$\int_{\partial c} \omega = f(b) - f(a).$$

Corolário 27.18. *Se $\omega \in \Omega^k(M)$ é exata e c é uma k-cadeia* fechada *(isto é, $\partial c = 0$; também dizemos que c é um k-*ciclo*), então*

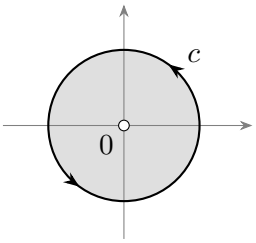
$$\int_c \omega = 0.$$

Demonstração. Se $\omega = d\eta$, então

$$\int_c \omega = \int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = \int_0 \eta = 0. \qquad \square$$

Exemplo 27.19. A forma $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ (em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) *não* é exata!

Observação 27.20. Se c é tal que $\int_c d\theta \neq 0$, então, pelo teorema de Stokes (e como $d\theta$ é fechada), c não é o bordo de uma 2-cadeia (em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$)!



Demonstração do teorema de Stokes, v1. (i) Podemos supor que $c = \sigma$ é um k-bloco. De fato, se $c = \sum_i n_i\sigma_i$, então, usando o teorema para cada σ_i,

$$\int_c d\omega = \sum_i n_i \int_{\sigma_i} d\omega = \sum_i n_i \int_{\partial\sigma_i} \omega = \int_{\sum_i n_i \partial\sigma_i} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

(ii) Podemos supor que $\sigma = \mathrm{Id}_{I^k}$ e que M é uma vizinhança de I^k em $\mathbb{R}^k$. Por definição,

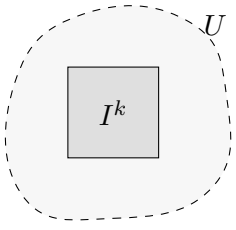
$$\int_\sigma d\omega = \int_{\mathrm{Id}_{I^k}} \sigma^*(d\omega) = \int_{\mathrm{Id}_{I^k}} d(\sigma^*\omega),$$

onde $\sigma^*\omega$ é uma $(k-1)$-forma em uma vizinhança de I^k. Usando o teorema para Id_{I^k},

$$\int_{\mathrm{Id}_{I^k}} d(\sigma^*\omega) = \int_{\partial\,\mathrm{Id}_{I^k}} \sigma^*\omega = \int_{\partial\sigma} \omega,$$

onde a última igualdade é uma verificação fácil.

(iii) Podemos supor que $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k$. Se $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^k$ é um aberto contendo I^k,



então

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i\,dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

logo, usando o teorema para cada parcela,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Id}_{I^k}} d\omega &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathrm{Id}_{I^k}} d(f_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial\, \mathrm{Id}_{I^k}} f_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{\partial\, \mathrm{Id}_{I^k}} \omega.\end{aligned}$$

Seja então $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k$ e $\sigma = \mathrm{Id}_{I^k}$. Por um lado,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \Big(\int_{\sigma_{(j,0)}} \omega - \int_{\sigma_{(j,1)}} \omega \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \Big(\int_{I^{k-1}} \sigma_{(j,0)}^* \omega - \int_{I^{k-1}} \sigma_{(j,1)}^* \omega \Big). \qquad (*)\end{aligned}$$

Se $j \neq i$, então $\sigma_{(j,0)}^* \omega = \sigma_{(j,1)}^* \omega = 0$ (pois x_j é constante nestas faces, logo $dx_j = 0$). Logo,

$$(*) = (-1)^i \int_{I^{k-1}} \big(f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_k) \big)\, dx,$$

onde aqui $dx = dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} d\omega &= \int_{\sigma} d(f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k) = \int_{\sigma} (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx. \qquad (**)\end{aligned}$$

Usando Fubini e o teorema fundamental do cálculo:

$$\begin{aligned}(**) &\overset{\text{Fubini}}{=} (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \Big)\, dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\ &\overset{\text{TFC}}{=} (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \big(f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_k) \big)\, dx,\end{aligned}$$

que coincide com $(*)$. □

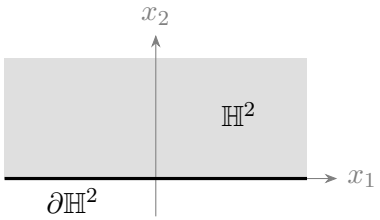
28 26/06

20) Variedades com bordo

Seja

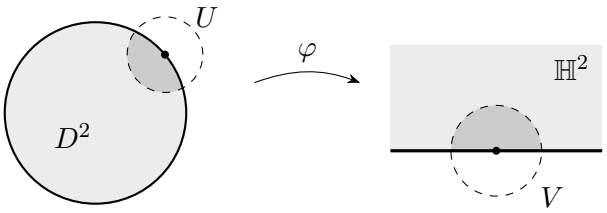
$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\}$$

o "semi-espaço fechado". O seu bordo é $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.



Definição 28.1. Um subconjunto $N \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma *variedade com bordo* de dimensão d se todo $p \in N$ admite uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $N \cap U$ é difeomorfo a um aberto $V \cap \mathbb{H}^d$ de $\mathbb{H}^d$. O *bordo* de N é o subconjunto ∂N que corresponde a $\partial\mathbb{H}^d$ sob um tal difeomorfismo. O *interior* de N é o subconjunto $N \setminus \partial N$.

Exemplo 28.2. O disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ é uma variedade com bordo de dimensão n. Seu bordo é $\partial D^n = S^{n-1}$ e seu interior é a bola aberta.



Observação 28.3. O interior de N é uma variedade (sem bordo) de dimensão d. O bordo ∂N é uma variedade (sem bordo) de dimensão $d-1$.

Como no caso sem bordo, temos:

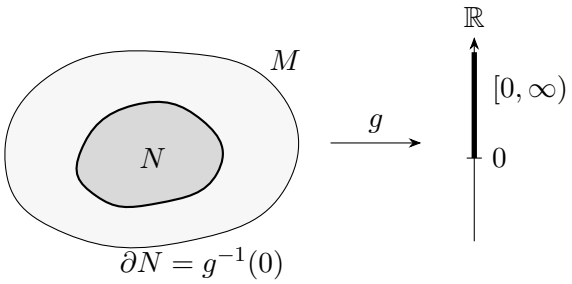
- *Parametrização local*: um difeomorfismo $\varphi\colon V \cap \mathbb{H}^d \to U \cap N$.
- *Carta local*: um difeomorfismo $\varphi\colon U \cap N \to V \cap \mathbb{H}^d$.

Teorema 28.4. *Seja M uma variedade (sem bordo) de dimensão d e $g\colon M \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Se 0 é um valor regular de g, então*

$$N := g^{-1}([0, \infty)) = \{x \in M : g(x) \geqslant 0\}$$

é uma variedade com bordo de dimensão d e $\partial N = g^{-1}(0)$.

Demonstração. Exercício. Separe nos casos $g(p) > 0$ (note que $g^{-1}((0,\infty))$ é aberto!) e $g(p) = 0$ (use a forma local das submersões).



□

Exemplo 28.5. $D^n = g^{-1}([0,\infty))$, onde $g(x) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Definição 28.6. Se N é uma variedade com bordo e $p \in N$, o *espaço tangente* a N em p é

$$T_pN = \operatorname{Im}\left(D\tilde{\varphi}(a)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n\right),$$

onde $\tilde{\varphi}\colon V \to \mathbb{R}^n$ é uma extensão de uma parametrização local φ em p e $a \in V \cap \mathbb{H}^d$ é tal que $\varphi(a) = p$.

Exemplo 28.7. Se $N = g^{-1}([0,\infty))$ como no teorema acima, então $T_pN = T_pM$.

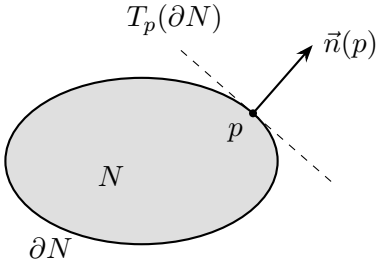
Observação 28.8.

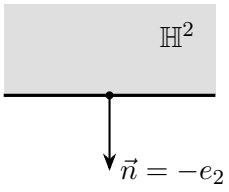
- T_pN sempre tem dimensão d.
- Se $p \in \partial N$, então $T_p(\partial N)$ é um subespaço de dimensão $d-1$ de T_pN.

Importante: dado $p \in \partial N$, existe um *único* vetor unitário

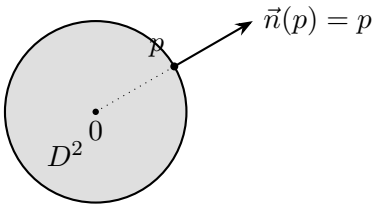
$$\vec{n}(p) \in T_pN$$

ortogonal a $T_p(\partial N)$ e que "aponta para fora".





Exemplo 28.9. Se $p \in S^1 = \partial D^2$, então $\vec{n}(p) = p \in T_p D^2 \cong \mathbb{R}^2$.



Formas diferenciais em variedades com bordo. As formas $\omega \in \Omega^k(N)$ são definidas da mesma maneira: a cada $p \in N$ associamos $\omega(p) \in A^k(T_pN)$, e localmente ω é da forma

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

com $f_{i_1,\ldots,i_k}$ de classe C^∞.

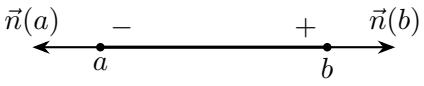
Exemplo 28.10 (Orientação induzida)**.** Uma forma de orientação $\omega \in \Omega^d(N)$ em uma variedade com bordo N induz uma forma de orientação $\eta \in \Omega^{d-1}(\partial N)$ no bordo, definida por

$$\eta(p)(v_1, \ldots, v_{d-1}) = \omega(p)(\vec{n}(p), v_1, \ldots, v_{d-1}),$$

onde $\vec{n}(p) \in T_pN$ é o vetor unitário ortogonal a $T_p(\partial N)$ que aponta para fora.

Exemplo 28.11.

- $N = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, logo $\partial N = \{a, b\}$. Se $\omega = dt$, então $\eta(b) = 1$ e $\eta(a) = -1$.



- $N = D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, logo $\partial N = S^1$. Se $\omega = dx \wedge dy$, então $\eta(p)(v) = \omega(p)(p, v) = \det(p, v)$, ou seja, $\eta = d\theta|_{S^1}$.

21) Integração em variedades (com bordo)

Objetivo: se M é uma variedade com bordo orientada e compacta de dimensão n e $\omega \in \Omega^n(M)$, definir

$$\int_M \omega.$$

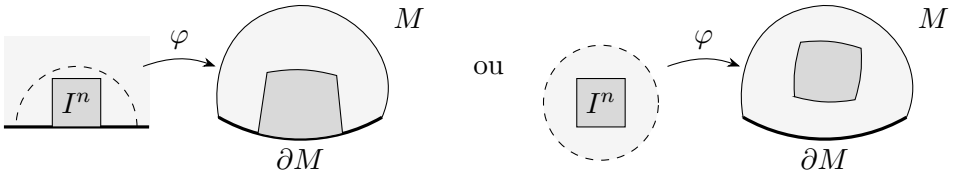
(Note que ω não precisa ser uma forma de orientação.)

(i) Se $\sigma\colon I^n \to M$ é um n-bloco singular, definimos

$$\int_\sigma \omega = \int_{I^n} \sigma^*\omega,$$

como no caso sem bordo.

(ii) Suponha que $\sigma = \varphi|_{I^n}$, onde φ é uma parametrização local *positiva* (na vizinhança do bordo ou no interior):



na vizinhança do bordo no interior

(*Positiva* significa compatível com a orientação: se ω' é uma forma de orientação, então

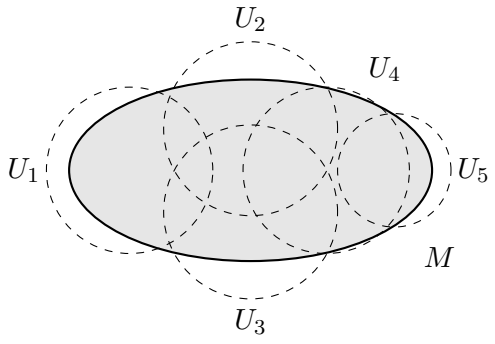
$$\omega'(\varphi(x))(D\varphi(x)e_1, \ldots, D\varphi(x)e_n) > 0$$

para todo $x \in V$.) Se $\omega = 0$ fora de $\sigma(I^n)$, definimos

$$\int_M \omega = \int_\sigma \omega.$$

Isto não depende da escolha de σ! (Pela fórmula de mudança de variável; ver Spivak.) Observe que a positividade é crucial aqui!

(iii) No caso geral, considere uma cobertura aberta finita $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ tal que, para todo $i \in I$, existe um n-cubo singular σ_i como em (ii) tal que $U_i \subseteq \sigma_i(I^n)$.



Se $\{\psi_j\}_{j\in J}$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$, definimos

$$\int_M \omega := \sum_{j\in J} \int_M \psi_j\, \omega.$$

Definição 28.12. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto e $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ uma cobertura aberta de X. Uma *partição da unidade* para X subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i\in I}$ é uma coleção de funções C^∞ $\{\psi_j \colon U \to \mathbb{R}\}_{j\in J}$ em um aberto U contendo X tais que:

(1) para todo $x \in X$, $0 \leqslant \psi_j(x) \leqslant 1$;

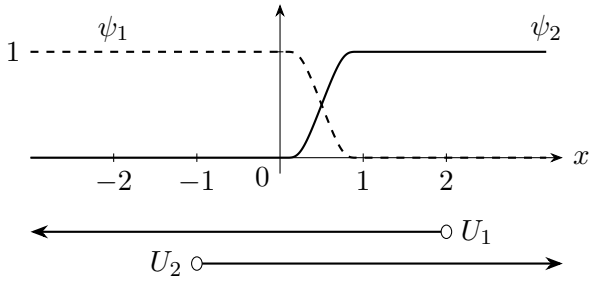
(2) para todo $x \in X$, existe uma vizinhança V de x tal que $\psi_j|_{X\cap V} \not\equiv 0$ apenas para um número finito de índices $j \in J$;

(3) para todo $x \in X$, $\sum_{j\in J} \psi_j(x) = 1$;

(4) o *suporte* de ψ_j, isto é, $\overline{\{x \in X : \psi_j(x) \neq 0\}}$, está contido em algum U_i.

Partições da unidade como acima sempre existem (ver Spivak). Se $X = M$ é uma variedade, podemos tomar $J = I$.

Exemplo 28.13. Sejam $X = \mathbb{R}$, $U_1 = (-\infty, 2)$ e $U_2 = (-1, \infty)$. Tome ψ_2 como no gráfico abaixo (nula em $(-\infty, 0]$ e igual a 1 em $[1, \infty)$) e $\psi_1 = 1 - \psi_2$.



Próxima aula.

Teorema (Stokes, v2)**.** *Seja M uma variedade com bordo compacta orientada de dimensão n e $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Então*

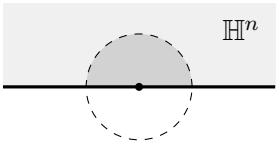
$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega,$$

onde ∂M tem a orientação induzida.

29 01/07

Aula passada.

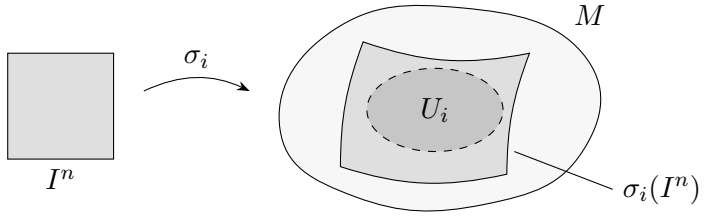
- Variedades com bordo: localmente são como $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\}$.



- Se M é uma n-variedade com bordo orientada e *compacta* e $\omega \in \Omega^n(M)$, definimos

$$\int_M \omega = \sum_j \underbrace{\int_M \psi_j \, \omega}_{\int_{I^n} \sigma_i^*(\psi_j \omega)} ,$$

onde $\{\psi_j\}_{j \in J}$ é uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$ (I finito) e σ_i é tal que o suporte de ψ_j está contido em $U_i \subseteq \sigma_i(I^n)$.



Observação. Sempre podemos tomar $J = I$.

21) Integração em variedades (cont.)

Observação 29.1. Se M não é compacta, ainda é possível definir a integral da mesma forma, desde que

$$\sum_{j \in J} \int_{I^n} |f_j(x)| \, dx$$

convirja ("convergência absoluta"), onde $f_j(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sigma_i^*(\psi_j \omega)$. Neste caso, dizemos que ω é *integrável*. A convergência e a integral não dependem de nenhuma escolha (cf. Spivak, Thm. 3.12).

Proposição 29.2 ("Mudança de variáveis")**.** *Sejam M, N n-variedades (com ou sem bordo) orientadas e $F\colon M \to N$ um difeomorfismo que preserva orientação. Se $\omega \in \Omega^n(N)$ é integrável, então*

$$\int_N \omega = \int_M F^* \omega.$$

Demonstração. Exercício (segue diretamente da definição e de $(F \circ G)^* = G^* F^*$). □

Proposição 29.3 (Irrelevância dos fechados de medida nula)**.** *Se M é uma n-variedade orientada e $F \subseteq M$ é um subconjunto fechado de medida nula (por exemplo, $F \subseteq N$, com N uma variedade de dimensão $\leqslant n-1$), então*

$$\int_M \omega = \int_{M \setminus F} \omega$$

para toda $\omega \in \Omega^n(M)$ integrável.

(Ideia: dado $\varepsilon > 0$, cubra F com um aberto U tal que $|\int_U \omega| < \varepsilon$ e considere uma partição da unidade subordinada a $\{U, M \setminus F\}$. Ver Elon, seção 7.6.)

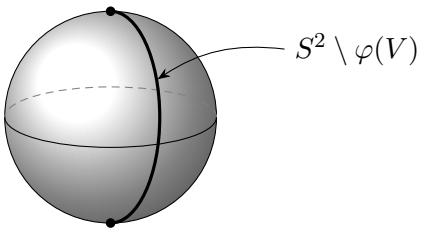
Corolário 29.4. *Se $\varphi\colon V \to \varphi(V) \subseteq M$ é uma parametrização local positiva tal que $M \setminus \varphi(V)$ tem medida nula, então*

$$\int_M \omega = \int_V \varphi^*(\omega|_{\varphi(V)})$$

para toda $\omega \in \Omega^n(M)$ integrável.

Exemplo 29.5. Seja $\varphi\colon V = (0,\pi)^{n-2} \times (0, 2\pi) \to S^{n-1}$ (coordenadas esféricas). Então

$$\int_{S^{n-1}} \omega = \int_V \varphi^* \omega.$$



Por exemplo, para $n = 2$ e $\omega = d\theta = (x\,dy - y\,dx)/(x^2 + y^2)$, temos

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Teorema 29.6 (Stokes, v2)**.** *Se M é uma n-variedade com bordo compacta orientada e $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

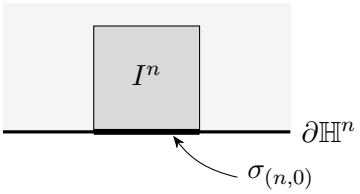
onde ∂M tem a orientação induzida.

Demonstração. (i) Suponha que $\omega = 0$ fora da imagem de um bloco singular $\sigma\colon I^n \to M \setminus \partial M$ (tal que $\sigma = \varphi|_{I^n}$, onde φ é uma parametrização local positiva de $M \setminus \partial M$). Então, pelo teorema de Stokes v1,

$$\int_M d\omega = \int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega = 0 = \int_{\partial M} \omega,$$

pois $\omega|_{\partial\sigma(I^n)} = 0$.

(ii) Suponha agora que $\sigma(I^n) \cap \partial M \neq \emptyset$, mas que $\sigma_{(n,0)}$ é a única face em ∂M.



Então

$$\int_M d\omega = \int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

(iii) No caso geral, considere uma cobertura finita $\{U_i\}_{i\in I}$ e $\sigma_i\colon I^n \to M$ tais que $U_i \subseteq \sigma_i(I^n)$ como em (i) ou (ii), e seja $\{\psi_i\}_{i\in I}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i\in I}$. Então

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \sum_{i\in I} \int_M \psi_i \, d\omega = \sum_{i\in I} \int_M \big(d(\psi_i\omega) - d\psi_i \wedge \omega\big) \\ &= \sum_{i\in I} \int_{\partial M} \psi_i \, \omega - \int_M d\Big(\underbrace{\sum_{i\in I} \psi_i}_{=1}\Big) \wedge \omega \\ &= \int_{\partial M} \omega,\end{aligned}$$

já que $d(1) = 0$. □

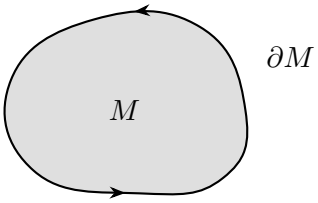
Corolário 29.7. *Seja M uma n-variedade compacta orientada* sem bordo. *Se $\omega \in \Omega^n(M)$ é exata, então $\int_M \omega = 0$.*

Demonstração. Se $\omega = d\eta$, então $\int_M \omega = \int_{\partial M} \eta = 0$, pois $\partial M = \emptyset$. □

22) Green, Gauss, Stokes

Teorema 29.8 (Green)**.** *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^2$ uma 2-variedade compacta com bordo. Se $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(M)$, então*

$$\int_{\partial M} f\,dx + g\,dy = \int_M \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx\,dy.$$



Demonstração. Consequência imediata do teorema de Stokes, v2. □

Observação 29.9. Se $r\colon I \to \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de ∂M e $F = (f, g)$ é um "campo", então, na notação do cálculo,

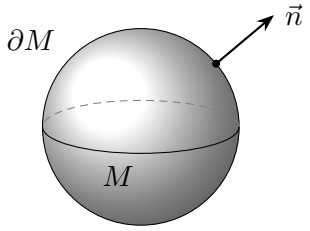
$$\int_{\partial M} f\,dx + g\,dy = \int_{\partial M} \langle F, dr\rangle$$

(ou $\int_{\partial M} F \cdot dr$).

Teorema 29.10 (Gauss, ou da divergência)**.** *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^3$ uma 3-variedade compacta com bordo e $\vec{n}$ o vetor unitário normal a ∂M que aponta para fora. Se $F \in C^\infty(M; \mathbb{R}^3)$ (um "campo"), então*

$$\int_M \operatorname{div} F\,dV = \int_{\partial M} \langle F, \vec{n}\rangle\ dA,$$

onde $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$*,* $dV = dx\,dy\,dz$ *e* dA *é a forma volume de* ∂M*.*



Demonstração. Se $\omega = F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy$, então $d\omega = \operatorname{div}(F)\,dx \wedge dy \wedge dz$, logo

$$\int_M \operatorname{div} F\,dV = \int_{\partial M} \omega.$$

Para todo $p \in \partial M$, temos

$$dA(p)(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{n} & v_1 & v_2 \\ | & | & | \end{pmatrix}, \qquad v_1, v_2 \in T_p\partial M,$$

isto é, $dA = n_1\,dy \wedge dz + n_2\,dz \wedge dx + n_3\,dx \wedge dy$. Note que, em ∂M,

$$\begin{cases} n_1\,dA = dy \wedge dz, \\ n_2\,dA = dz \wedge dx, \\ n_3\,dA = dx \wedge dy. \end{cases}$$

(Se uma matriz ortogonal de determinante 1 tem colunas (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) e (c_1, c_2, c_3), então

$$(a_1, a_2, a_3) = \big(b_2c_3 - c_2b_3,\ -(b_1c_3 - c_1b_3),\ b_1c_2 - c_1b_2\big).)$$

Logo,

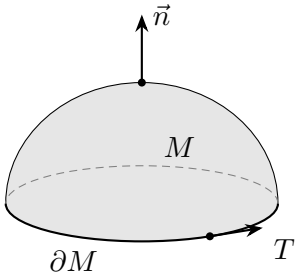
$$\langle F, \vec{n}\rangle\ dA = F_1n_1\,dA + F_2n_2\,dA + F_3n_3\,dA = \omega. \qquad \square$$

Teorema 29.11 (Stokes, clássico)**.** *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^3$ uma 2-variedade com bordo orientada compacta e seja $\vec{n}$ o vetor unitário normal a M que "aponta para fora" (isto é, compatível com a orientação). Seja T o campo de vetores em ∂M tal que $ds(T) = 1$, onde ds é a forma volume de ∂M. Se $F \in C^\infty(M; \mathbb{R}^3)$, então*

$$\int_M \langle \mathrm{rot}(F), \vec{n}\rangle\ dA = \int_{\partial M} \langle F, T\rangle\ ds,$$

onde $\mathrm{rot}(F) = \nabla \times F$ *e dA é a forma volume de M. Em notação clássica (com $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$):*

$$\iint_M \Big(n_1\Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\Big) + \cdots\Big)\,dS = \int_{\partial M} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz.$$



Demonstração. Se $\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \in \Omega^1(M)$, então

$$\langle \mathrm{rot}(F), \vec{n}\rangle\ dA = d\omega.$$

Por outro lado, $T_1\,ds = dx$, $T_2\,ds = dy$ e $T_3\,ds = dz$ (em ∂M), logo $\langle F, T\rangle\ ds = \omega|_{\partial M}$. $\square$

Observação 29.12. Se r é uma parametrização de ∂M, o lado direito se escreve classicamente como

$$\int_{\partial M} F \cdot dr.$$

A Normas em $\mathbb{R}^n$

Apêndice escrito por André Rasera.

Normas

Além da sua estrutura de espaço vetorial, o espaço $\mathbb{R}^n$ tem outra característica fundamental: nele podemos medir o comprimento dos vetores, usando as chamadas *normas*. Vamos recordar a definição.

Definição A.1. Uma *norma* em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ tal que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (positividade);
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogeneidade);
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

A norma mais natural em $\mathbb{R}^n$ é a *norma euclidiana*, dada por

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(o porquê do subíndice 2 ficará claro adiante). Ela vem da geometria euclidiana plana e espacial: assumindo os postulados da geometria euclidiana, essa noção de comprimento é consequência do teorema de Pitágoras, generalizada da maneira mais natural para n dimensões. A norma euclidiana vem do *produto interno euclidiano*: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ têm coordenadas x_i e y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

e $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Do mesmo modo, todo produto interno em $\mathbb{R}^n$ define uma norma. Produtos internos permitem medir ângulos entre vetores, de modo que normas que vêm de produtos internos são as mais naturais para tratar noções geométricas. Da álgebra linear, sabemos que todo produto interno em $\mathbb{R}^n$ é da forma $\langle Ax, y\rangle$ para alguma matriz A simétrica positiva definida; assim, essas novas normas são bastante parecidas com a euclidiana: suas bolas unitárias fechadas são elipsoides sólidos (e suas esferas unitárias são elipsoides; lembre que a esfera unitária de uma norma $\|\cdot\|$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$).

Há, no entanto, normas que não vêm de produtos internos e que também são importantes. Por exemplo, a *norma da soma*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

e a *norma do máximo* (ou *do supremo*)

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

(verifique que essas duas funções são, de fato, normas em $\mathbb{R}^n$). Mais geralmente, existe uma família contínua de normas, as *p-normas* (muito importantes no estudo de espaços de funções), dadas por

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

Cada $\|\cdot\|_p$ é uma norma, mas, para $n \geqslant 2$, nenhuma delas vem de um produto interno, com exceção da norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ (daí o subíndice 2); o mesmo vale para $\|\cdot\|_\infty$. A norma do máximo é o "limite" das normas $\|\cdot\|_p$ quando $p \to \infty$: $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|x\|_p$ para todo x, e as bolas unitárias das p-normas se aproximam do quadrado (em geral, do cubo) centrado na origem que é a bola unitária de $\|\cdot\|_\infty$; mas em geral é preciso tratá-la separadamente. Para provar que essas normas não vêm de produtos internos, procure pela "lei do paralelogramo": uma norma a satisfaz se, e somente se, vem de um produto interno. Basta então exibir pontos específicos para os quais a lei não vale.

Mesmo assim, essas normas codificam uma noção de comprimento e com frequência serão úteis (especialmente as normas do máximo e da soma). As normas euclidiana, do máximo e da soma satisfazem desigualdades que as tornam essencialmente "intercambiáveis": quase tudo que se faz com uma norma se faz com outra, e podemos escolher a norma que mais facilita a conta em cada contexto. Vamos precisar essa afirmação a seguir.

Definição A.2. Uma norma $\|\cdot\|_a$ é *equivalente* a uma norma $\|\cdot\|_b$ em $\mathbb{R}^n$ se existem constantes $c, C > 0$ tais que

$$c\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant C\|x\|_a \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(c e C não dependem do ponto x!).

Exercício A.3. Verifique que a equivalência de normas é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, é de fato uma relação de equivalência no conjunto das normas em $\mathbb{R}^n$.

Vejamos agora quais propriedades são preservadas por normas equivalentes, precisando o sentido da palavra "intercambiáveis".

Definição A.4. Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. Uma sequência $(x_k)_k$ em $\mathbb{R}^n$ *converge* a $x \in \mathbb{R}^n$ com relação a $\|\cdot\|$ se

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é *limitado* com relação a $\|\cdot\|$ se existe $K > 0$ tal que $\|x\| \leqslant K$ para todo $x \in A$. Uma sequência $(x_k)_k$ em $\mathbb{R}^n$ é limitada com relação a $\|\cdot\|$ se o conjunto $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ o é.

Teorema A.5. *Sejam $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ normas equivalentes em $\mathbb{R}^n$. Então uma sequência $(x_k)_k$ converge a x com relação a $\|\cdot\|_a$ se, e somente se, converge a x com relação a $\|\cdot\|_b$. Da mesma forma, um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (ou uma sequência) é limitado com relação a $\|\cdot\|_a$ se, e somente se, é limitado com relação a $\|\cdot\|_b$.*

Demonstração. Como a equivalência de normas é simétrica, basta provar uma das implicações. Sejam $c, C > 0$ tais que $c\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant C\|x\|_a$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Se $(x_k)_k$ converge a x com relação a $\|\cdot\|_a$, então

$$0 \leqslant \|x_k - x\|_b \leqslant C\|x_k - x\|_a \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

logo $\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\|_b = 0$, isto é, $(x_k)_k$ converge a x com relação a $\|\cdot\|_b$.

Se A é limitado com relação a $\|\cdot\|_a$, existe $K > 0$ tal que $\|x\|_a \leqslant K$ para todo $x \in A$. Portanto $\|x\|_b \leqslant C\|x\|_a \leqslant CK$ para todo $x \in A$, e A é limitado com relação a $\|\cdot\|_b$. □

Muitas outras propriedades são preservadas; por exemplo, duas normas são equivalentes se, e somente se, definem a mesma topologia. No caso das normas euclidiana, do máximo e da soma, não é difícil verificar que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty.$$

Na realidade, podemos aprimorá-las. As desigualdades a seguir são as equivalências "ótimas" entre essas normas, no sentido de que as constantes não podem ser melhoradas: em cada desigualdade há casos em que ocorre a igualdade.

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 &\leqslant \sqrt{n}\|x\|_2,\\
\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 &\leqslant n\|x\|_\infty,\\
\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 &\leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Exercício A.6. Se você conhece a desigualdade de Hölder (da teoria da medida) e tem alguma experiência com desigualdades, prove as desigualdades ótimas para as p-normas: dados $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|x\|_q.$$

As desigualdades acima já mostram que essas três normas são equivalentes. Muitas vezes, fazer as contas com a norma euclidiana pode ser um tanto complicado (por causa da raiz quadrada e das potências, por exemplo); por isso, frequentemente é mais simples fazer a conta com a norma do máximo ou com a norma da soma, e o resultado final será o mesmo. Atenção: se

a demonstração utilizar a estrutura de produto interno associada à norma euclidiana, pode não ser possível reproduzi-la com as outras normas. A demonstração da desigualdade do valor médio, por exemplo, fica bem mais elaborada para normas que não a euclidiana. Por isso, esse intercâmbio de normas deve ser feito com cautela.

Mas não são só essas três normas que são equivalentes: usando algumas propriedades básicas de $\mathbb{R}^n$, vamos demonstrar que *todas* as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes. Começamos com alguns resultados preliminares.

Lema A.7 (Continuidade da norma)**.** *Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. Se $(x_k)_k$ converge a x com relação a $\|\cdot\|$, então $(\|x_k\|)_k$ converge a $\|x\|$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Por hipótese, $\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\| = 0$. Pela desigualdade triangular reversa, $|\|x_k\| - \|x\|| \leqslant \|x_k - x\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto

$$0 \leqslant |\|x_k\| - \|x\|| \leqslant \|x_k - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

ou seja, $(\|x_k\|)_k$ converge a $\|x\|$. □

Também precisaremos do teorema de Bolzano–Weierstrass, adaptado para $\mathbb{R}^n$.

Lema A.8. *Seja $\|\cdot\|$ uma das três normas anteriores (euclidiana, do máximo ou da soma). Uma sequência $(x_k)_k$ converge a x em $\mathbb{R}^n$ com relação a $\|\cdot\|$ se, e somente se, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ a sequência $(x_{k,i})_k$ das i-ésimas coordenadas de $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$ converge à i-ésima coordenada x_i de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Como a convergência é preservada por normas equivalentes (Teorema A.5), basta provar o resultado para uma das três normas; escolhemos a norma do máximo. Suponha primeiro que $(x_k)_k$ converge a x com relação a $\|\cdot\|_\infty$. Então, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$0 \leqslant |x_{k,i} - x_i| \leqslant \max\{|x_{k,1} - x_1|, \ldots, |x_{k,n} - x_n|\} = \|x_k - x\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

de modo que $(x_{k,i})_k$ converge a x_i. Reciprocamente, suponha que cada $(x_{k,i})_k$ converge a x_i. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $k \geqslant k_i$ implica $|x_{k,i} - x_i| < \varepsilon$. Tomando $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, temos, para todo $k \geqslant k_0$,

$$\|x_k - x\|_\infty = \max\{|x_{k,1} - x_1|, \ldots, |x_{k,n} - x_n|\} < \varepsilon.$$

Sendo ε arbitrário, $\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\|_\infty = 0$, isto é, $(x_k)_k$ converge a x com relação a $\|\cdot\|_\infty$. □

Teorema A.9 (Bolzano–Weierstrass em $\mathbb{R}^n$)**.** *Seja $\|\cdot\|$ uma das três normas anteriores (euclidiana, do máximo ou da soma). Se $(x_k)_k$ é uma sequência limitada com relação a $\|\cdot\|$, então existe uma subsequência $(x_{k_j})_j$ que converge a algum $x \in \mathbb{R}^n$ com relação a $\|\cdot\|$.*

Demonstração. Como limitação e convergência são preservadas por normas equivalentes, basta provar o teorema para a norma do máximo.

Como $(x_k)_k$ é limitada, existe $K > 0$ tal que $\|x_k\|_\infty \leqslant K$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $|x_{k,i}| \leqslant K$ para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim, cada sequência de números reais $(x_{k,i})_k$ é limitada. Pelo teorema de Bolzano–Weierstrass na reta, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $(x_{k,1})_{k\in\mathbb{N}_1}$ converge a um certo $x_1 \in \mathbb{R}$ (uma maneira de dizer que existe uma subsequência convergente; como tomaremos subsequências sucessivamente, essa notação evita que o argumento fique muito poluído).

A sequência $(x_{k,2})_{k\in\mathbb{N}_1}$ continua limitada e, usando outra vez o teorema de Bolzano–Weierstrass na reta, obtemos um subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1$ tal que $(x_{k,2})_{k\in\mathbb{N}_2}$ converge a um certo $x_2 \in \mathbb{R}$. Prosseguindo indutivamente, obtemos subconjuntos infinitos $\mathbb{N}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{N}_1$ tais que $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}_i}$ converge a um real x_i para cada $1 \leqslant i \leqslant n$. Em particular, escrevendo $\mathbb{N}_n = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \cdots\}$, cada subsequência $(x_{k_j,i})_j$ converge a x_i. Pelo Lema A.8, $(x_{k_j})_j$ converge a $x = (x_1, \ldots, x_n)$ com relação a $\|\cdot\|_\infty$. □

Teorema A.10. *Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração. Vamos provar que toda norma é equivalente à norma da soma; por transitividade, segue que todas as normas são equivalentes entre si. Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer e seja $C = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\} > 0$, onde $e_1, \ldots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\| \\ &\leqslant |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \\ &\leqslant C\big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big) = C\|x\|_1.\end{aligned}$$

Essa é uma das desigualdades. A desigualdade inferior é um pouco mais delicada: não temos uma desigualdade triangular "ao contrário" que permita repetir a conta acima. Faremos a prova por contradição.

Suponha que não exista $c > 0$ tal que $c\|x\|_1 \leqslant \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Em outras palavras, para todo $c > 0$ existe $x_c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c\|x_c\|_1 > \|x_c\|$. Tomando $c = 1/k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ obtemos $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{1}{k}\|x_k\|_1 > \|x_k\|$, ou seja, $k\|x_k\| < \|x_k\|_1$. Note que $x_k \neq 0$. (Por que $1/k$? A desigualdade inferior da equivalência consiste em encaixar uma norma por baixo da outra; por isso procuramos valores pequenos de c.)

Com uma sequência em mãos, gostaríamos de obter uma contradição por um processo de limite, mas $(x_k)_k$ não converge necessariamente. Usaremos então uma técnica importante e recorrente neste curso: como $x_k \neq 0$, considere a sequência $(y_k)_k$ dada por $y_k = x_k/\|x_k\|_1$. Ela é limitada com relação a $\|\cdot\|_1$, pois $\|y_k\|_1 = 1$ para todo k.

Pelo teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema A.9), existe uma subsequência $(y_{k_j})_j$ que converge a um certo $y \in \mathbb{R}^n$ com relação a $\|\cdot\|_1$. Além disso, $\|y\|_1 = 1$: pelo Lema A.7, $(\|y_{k_j}\|_1)_j$ converge a $\|y\|_1$, e essa sequência é constante igual a 1.

A subsequência $(y_{k_j})_j$ também converge a y com relação a $\|\cdot\|$: pela primeira parte,

$$0 \leqslant \|y_{k_j} - y\| \leqslant C \|y_{k_j} - y\|_1 \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Por outro lado,

$$\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_1} < \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Usando novamente o Lema A.7, obtemos $\|y\| = \lim_{j\to\infty} \|y_{k_j}\| = 0$. Como $\|\cdot\|$ é uma norma, $y = 0$, o que é impossível, pois $\|y\|_1 = 1$. Logo existe $c > 0$ tal que $c\|x\|_1 \leqslant \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e

$$c\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

isto é, as normas são equivalentes. □

Observação A.11. Esse resultado mostra que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ definem a mesma topologia; em particular, espaços vetoriais normados de mesma dimensão finita são homeomorfos (por meio de um isomorfismo linear). Mais do que isso, é possível provar que todo espaço vetorial real de dimensão finita admite uma única topologia de Hausdorff compatível com a estrutura vetorial, em imenso contraste com o que acontece em dimensão infinita, onde há várias topologias diferentes compatíveis com a estrutura e, pior ainda, normas não equivalentes.

Como as noções de convergência e limitação são preservadas por normas equivalentes, assim como o teorema de Bolzano–Weierstrass, podemos falar de convergência com relação a *qualquer* norma em $\mathbb{R}^n$. Assim, daqui em diante, falaremos de convergência e limitação sem mencionar uma norma específica. Também não é difícil verificar que, para a continuidade de funções, a norma não faz diferença (a não ser nas quantidades exatas que aparecem; qualitativamente, nada muda de uma norma para outra).

Corolário A.12. *Valem as seguintes afirmações.*

- *Uma sequência $(x_k)_k$ em $\mathbb{R}^n$ converge a x se, e somente se, para qualquer norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$, temos $\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\| = 0$.*

- *Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, qualquer que seja a norma $\|\cdot\|$, existe $K > 0$ (dependendo da norma) tal que $\|x\| \leqslant K$ para todo $x \in A$.*

- *Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, quaisquer que sejam as normas $\|\cdot\|_a$ em $\mathbb{R}^m$ e $\|\cdot\|_b$ em $\mathbb{R}^n$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (dependendo das normas) tal que $\|x - x_0\|_a < \delta$ implica $\|f(x) - f(x_0)\|_b < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Normas de operadores

Outro tipo de norma muito importante neste curso são as normas de operador, definidas no espaço das transformações lineares. O espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ das transformações lineares $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pode ser identificado com o espaço das matrizes $n \times m$, isto é, com $\mathbb{R}^{mn}$ acrescido de um produto específico (o produto de matrizes); assim, o resultado de equivalência de normas também vale para normas em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Apesar disso, a composição de transformações lineares é uma operação importante, e normas quaisquer não necessariamente dão estimativas adequadas nesse contexto. As normas de operador suprem essa necessidade. Começamos mostrando que toda transformação linear é contínua.

Teorema A.13. *Seja $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Então T é contínua (em todo ponto $x \in \mathbb{R}^m$). Mais do que isso, fixadas normas $\|\cdot\|_a$ em $\mathbb{R}^m$ e $\|\cdot\|_b$ em $\mathbb{R}^n$, existe $C \geqslant 0$ tal que $\|T(x)\|_b \leqslant C\|x\|_a$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Provaremos primeiro a segunda afirmação e a usaremos para concluir que T é contínua. Seja $e_1, \ldots, e_m$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e defina $C_0 = \max\{\|T(e_1)\|_b, \ldots, \|T(e_m)\|_b\} \geqslant 0$. Para todo $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_b &= \|x_1 T(e_1) + \cdots + x_m T(e_m)\|_b \\ &\leqslant |x_1|\|T(e_1)\|_b + \cdots + |x_m|\|T(e_m)\|_b \\ &\leqslant C_0(|x_1| + \cdots + |x_m|) = C_0\|x\|_1.\end{aligned}$$

As normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_a$ são equivalentes em $\mathbb{R}^m$, logo existe $C_1 > 0$ tal que $\|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_a$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Com $C = C_0 C_1 \geqslant 0$, obtemos $\|T(x)\|_b \leqslant C_0\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_a$.

Para ver que T é contínua, podemos supor $C > 0$ (aumentando C, se necessário). Dados $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/C > 0$; então, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ com $\|x - x_0\|_a < \delta$,

$$\|T(x) - T(x_0)\|_b = \|T(x - x_0)\|_b \leqslant C\|x - x_0\|_a < C\delta = \varepsilon. \qquad \square$$

Podemos agora definir as normas de operador. Fixadas normas $\|\cdot\|_a$ em $\mathbb{R}^m$ e $\|\cdot\|_b$ em $\mathbb{R}^n$, a *norma de operador* de $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ com relação a essas normas é

$$\|T\|_{b,a} = \inf\{C \geqslant 0 : \|T(x)\|_b \leqslant C\|x\|_a \ \ \forall x \in \mathbb{R}^m\}.$$

Essa definição faz sentido, pois o conjunto acima é não vazio (Teorema A.13) e limitado inferiormente por 0. Esse ínfimo é atingido: tomando C_j no conjunto com $C_j \to \|T\|_{b,a}$ e passando ao limite em $\|T(x)\|_b \leqslant C_j\|x\|_a$, obtemos

$$\|T(x)\|_b \leqslant \|T\|_{b,a}\|x\|_a \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Além disso, $\|\cdot\|_{b,a}$ é, de fato, uma norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (ou, se preferir, em $\mathbb{R}^{mn}$, pela identificação acima). Verifique que vale também

$$\|T\|_{b,a} = \sup\{\|T(x)\|_b : x \in \mathbb{R}^m, \ \|x\|_a = 1\}.$$

Essa segunda expressão é mais intuitiva: uma transformação linear fica determinada por como age nos vetores unitários, e a sua norma é a maior dilatação possível desses vetores, de modo parecido com a norma do máximo (em que procuramos a maior coordenada). Para efeitos de cálculo, usaremos bastante a primeira definição. A propriedade mais importante das normas de operador é a seguinte.

Teorema A.14. *Sejam $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $S\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ transformações lineares e sejam $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$, $\|\cdot\|_c$ normas em $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Então*

$$\|T \circ S\|_{c,a} \leqslant \|T\|_{c,b}\|S\|_{b,a}.$$

Demonstração. Como $\|T \circ S\|_{c,a}$ é o menor número $C \geqslant 0$ tal que $\|T(S(x))\|_c \leqslant C\|x\|_a$ para todo $x \in \mathbb{R}^k$, basta mostrar que $\|T\|_{c,b}\|S\|_{b,a}$ é um desses números. Pelas definições,

$$\|T(S(x))\|_c \leqslant \|T\|_{c,b}\|S(x)\|_b \leqslant \|T\|_{c,b}\|S\|_{b,a}\|x\|_a$$

para todo $x \in \mathbb{R}^k$. Logo $\|T \circ S\|_{c,a} \leqslant \|T\|_{c,b}\|S\|_{b,a}$. □

Em geral, usaremos a mesma norma nos espaços em questão, e a notação fica mais leve. O resultado que acabamos de provar se escreve então (e se lembra facilmente) como

$$\|T \circ S\| \leqslant \|T\|\|S\|.$$

Além disso, dependendo das normas escolhidas para construir a norma de operador, temos diferentes algoritmos para calculá-la. Por exemplo, quando as duas normas em questão são a euclidiana (a 2-norma), a norma de operador de T é igual ao seu maior valor singular (relativo à importantíssima decomposição em valores singulares, ou SVD). Uma tabela com algumas das possíveis normas de operador pode ser encontrada no capítulo I, §15, do *Curso de Análise*, vol. 2, de E. L. Lima.

Listas de exercícios

Lista 0: revisão de topologia euclidiana

18 de fevereiro de 2025

Notação (norma euclidiana): dado $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

1. Revise as seguintes definições, bem como caracterizações equivalentes, para um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ com a topologia euclidiana: *aberto*, *fechado*, *limitado*, *conexo* e *compacto*. Revise também as noções de *interior*, *fecho* e *bordo* de um subconjunto. Qual é a diferença entre *ponto aderente* e *ponto de acumulação*?

2. Calcule o interior e o bordo de cada um dos seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}, \qquad \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, \qquad \mathbb{Q}^n.$$

3. O que dizem os teoremas de Heine–Borel e de Bolzano–Weierstrass?

4. Seja $(p_k)_{k\geqslant 1}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ e denote por $p_k = (p_{k,1}, \ldots, p_{k,n})$ as coordenadas de p_k. Seja $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $(p_k)_{k\geqslant 1}$ converge para q em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, cada $(p_{k,i})_{k\geqslant 1}$ converge para q_i em $\mathbb{R}$.

5. Uma sequência $(p_k)_{k\geqslant 1}$ em $\mathbb{R}^n$ é dita *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$ existe k_0 tal que, se $k, l \geqslant k_0$, então $\|p_k - p_l\| < \varepsilon$. Mostre que $\mathbb{R}^n$ é *completo*, isto é, que toda sequência de Cauchy converge.

6. Dado um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, lembremos que uma aplicação $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ é *contínua* em um ponto $p \in X$ se, para toda vizinhança aberta $V \subseteq \mathbb{R}^m$ de $F(p)$ existe uma vizinhança aberta $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de p tal que $F(U \cap X) \subseteq V$. Mostre que esta definição é equivalente à "definição por ε e δ": $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $p \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ satisfaz $\|x - p\| < \delta$, então $\|F(x) - F(p)\| < \varepsilon$.

7. Com a notação do exercício anterior, mostre que $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ é contínua em (todo ponto de) X se, e somente se, para todo aberto $V \subseteq \mathbb{R}^m$ existe um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $F^{-1}(V) = U \cap X$ ("imagem inversa de aberto é aberto").

8. Ainda com a notação anterior, sejam $F_1, \ldots, F_m \colon X \to \mathbb{R}$ as componentes de F, isto é, $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$. Mostre que $F \colon X \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $p \in X$ se, e somente se, todas as $F_i \colon X \to \mathbb{R}$ são contínuas em p.

9. Lembremos que um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^m$ é *discreto* se todo ponto $p \in E$ admite uma vizinhança aberta $U \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $E \cap U = \{p\}$. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto conexo e $f \colon X \to E$ uma aplicação contínua. Mostre que f é constante.

10. Mostre que todo subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ é enumerável. Um subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ é necessariamente fechado?

11. Mostre que um aberto não vazio $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, quaisquer dois pontos $p, q \in U$ podem ser conectados por um *caminho poligonal*, isto é, uma coleção de segmentos em U da forma

$$[p, p_1],\ [p_1, p_2],\ \ldots,\ [p_{k-1}, q].$$

12. Considere subconjuntos $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Um *homeomorfismo* entre X e Y é uma aplicação contínua $F \colon X \to Y$ que admite uma inversa contínua, isto é, existe uma aplicação contínua $G \colon Y \to X$ tal que

$$F \circ G = \mathrm{Id}_Y \qquad \text{e} \qquad G \circ F = \mathrm{Id}_X\,.$$

Exiba um homeomorfismo explícito entre

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \qquad \text{e} \qquad Y = \mathbb{R}^2.$$

Existe um homeomorfismo entre

$$X = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \qquad \text{e} \qquad Y = \mathbb{R}\,?$$

13. Um *bloco aberto* em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto da forma

$$U = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n),$$

onde cada $(a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto limitado. Mostre que os blocos abertos formam uma *base* para a topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$, isto é, todo aberto em $\mathbb{R}^n$ é uma união de blocos abertos.

14. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $D \subseteq X$ um subconjunto. Dizemos que D é *denso* em X se para todo $x \in X$ e toda vizinhança aberta $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x, a interseção $D \cap U$ é não vazia. Mostre que, se $F, G \colon X \to \mathbb{R}^m$ são aplicações contínuas tais que $F(x) = G(x)$ para todo x em um subconjunto denso de X, então $F = G$.

15. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma *função polinomial*:

$$f(x) = \sum_{i_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{d_n} a_{i_1,\ldots,i_n}\, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Mostre que, se f não é identicamente nula, então $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ é denso em $\mathbb{R}^n$.

16. Identificando o espaço de matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$, mostre que o subconjunto das *matrizes ortogonais*

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AA^t = A^tA = I\}$$

é compacto.

Lista 1: derivadas direcionais e funções de classe C^k

7 de março de 2025

1. Encontre todas as derivadas parciais de $f(x, y, z) = (x + y)^z$ (no aberto $\{x + y > 0\}$).

2. Seja $p = (1, y_0)$, com $y_0 > -1$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$, onde

$$f(x, y) = x^{x^{x^y}} + (\log x)\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\cos(xy) - \log(x + y))).$$

3. Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Encontre as derivadas parciais com respeito a x e y das funções

$$\int_0^{xy} g(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_x^y g(t)\,dt.$$

4. Estude a continuidade e a existência de derivadas direcionais da função

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases}$$

5. Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se, para todos $p, q \in X$, o segmento $[p, q]$ está contido em X. Mostre que, se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto convexo e $f\colon U \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ em U, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$, então f não depende da variável x_j. A hipótese de convexidade em U é necessária?

6. Mostre que, se λ é um real e v é um vetor, então

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda v)}(p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Se v, w são dois vetores, vale em geral que

$$\frac{\partial f}{\partial(v + w)}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial w}(p)\,?$$

7. Existe uma função contínua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais na origem, mas não admite todas as derivadas direcionais?

8. A "fórmula de adição" da função arctg diz que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$ com $xy \neq 1$,

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + n\pi,$$

onde n é um inteiro que depende de x, y. Demonstre a fórmula acima usando derivadas parciais e calcule n explicitamente.

9. Lembre que podemos identificar o espaço de matrizes $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$ (digamos, com coordenadas x_{ij}). Encontre uma fórmula para as derivadas parciais da função determinante $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e calcule

$$\frac{\partial \det}{\partial x_{21}}(A), \qquad \text{onde } A = \begin{pmatrix} 3 & -81 & 0 \\ 7 & 42 & -5 \\ 1 & -4 & 25 \end{pmatrix}.$$

[Dica: Laplace.]

10. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Mostre que, se todas as derivadas parciais de $f\colon U \to \mathbb{R}$ existem e são *limitadas* em U, então f é contínua em U.

11. Mostre que, se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo e $p, q \in U$, então existe um caminho poligonal em U com vértices $p = p_0, p_1, \ldots, p_k = q$ de maneira que, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, o vetor $p_i - p_{i-1}$ é colinear com algum vetor da base canônica.

12. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua que possui todas as derivadas direcionais em qualquer ponto. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial v}(v) > 0$ sempre que $\|v\| = 1$. Mostre que existe um ponto em $\mathbb{R}^n$ no qual todas as derivadas direcionais de f se anulam. [Dica: a imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.]

13. Dado um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, mostre que o conjunto das funções de classe C^k em U, denotado $C^k(U)$, é uma $\mathbb{R}$-álgebra comutativa com unidade. Mostre que todas as inclusões

$$C^0(U) \supseteq C^1(U) \supseteq \cdots \supseteq C^k(U) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(U)$$

são estritas.

14. Verifique que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

é de classe C^1 e admite derivadas parciais de segunda ordem em todo $\mathbb{R}^2$, mas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0).$$

15. Seja $n \geqslant 3$ e

$$h\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \frac{1}{\|x\|^{n-2}}.$$

Mostre que h é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} = 0.$$

O que acontece se $n = 2$ e $n = 1$? Existe uma função h de classe C^∞ que satisfaz a equação acima e $\lim_{x\to 0} h(x) = \infty$?[5]

16. Dado $k \geqslant 1$, qual é o número máximo de derivadas parciais de ordem k *distintas* que uma função de classe C^k pode ter?

17. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $k \geqslant 1$ um inteiro, $f, g \in C^k(U)$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice de comprimento $|\alpha| \leqslant k$. Demonstre a seguinte fórmula de Leibniz

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \, \partial^{\alpha-\beta} g,$$

onde $\beta \leqslant \alpha$ significa que $\beta_i \leqslant \alpha_i$ para todo i e $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

18. Mostre que a função

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}}, & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geqslant 1 \end{cases}$$

é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$. Construa uma função C^∞ em $\mathbb{R}^n$ que seja positiva no bloco aberto

$$(-1, 1)^n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 < x_i < 1, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n\}$$

e se anule fora deste conjunto.

[5] O operador $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ é dito *laplaciano*. Uma função h que satisfaz $\Delta h = 0$ é dita *harmônica*.

Lista 2: diferencial de uma função

26 de março de 2025

1. Seja $f(x,y) = e^{4x-y^2}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ onde $p = (1,-2)$ e $v = (3/5, 4/5)$.

2. Considere um cone de altura 5 cm e base de raio 3 cm. Se a altura for aumentada de 0,2 cm, estime o quanto deve diminuir o raio para que o volume se mantenha constante.

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Calcule $df(p)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

4. Estude a diferenciabilidade de

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

5. (Qualificação 2006) Se $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $|f(x)| \leqslant \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostre que f é diferenciável em $x = 0$.

6. (Qualificação 2019) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

A função f é contínua? Tem derivadas parciais na origem? É diferenciável?

7. (Qualificação 2017) Para quais valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2y^4z^6)}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, & (x,y,z) \neq 0, \\ 0, & (x,y,z) = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^3$? Para quais ela não é?

8. (Qualificação 2021) Seja $\rho \geqslant 0$ e considere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e

$$f(x,y) = \frac{|x|^\rho\, y(x-y)}{x^2+y^2}$$

se $(x,y) \neq 0$ (com a convenção $|x|^0 = 1$).

(a) Estude a continuidade de f dependendo do valor de ρ.

(b) Calcule, se possível, $\frac{\partial f}{\partial x}(0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0)$.

(c) Estude a diferenciabilidade na origem de f dependendo do valor de ρ.

9. (Qualificação 2010, 2013) Sejam f e g duas funções diferenciáveis em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $f(0) = g(0)$ e que $\nabla f(0) = \nabla g(0)$. Seja h uma função definida em uma vizinhança U de 0 tal que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ para todo x em U. Mostre que h é diferenciável em $x = 0$.

10. Uma *forma quadrática* é uma função da forma

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle\,,$$

onde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica. Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e calcule os funcionais lineares $df(p)$.

11. Seja V_n o espaço vetorial das funções polinomiais em uma variável de grau menor ou igual a n, isto é, funções da forma $p(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n$, com $x_i \in \mathbb{R}$. Note que podemos identificar V_n com $\mathbb{R}^{n+1}$ tomando os coeficientes x_i como coordenadas. Estude a diferenciabilidade da função

$$f\colon V_n \to \mathbb{R}, \qquad p \longmapsto \int_0^1 \operatorname{sen}(t\,p(t))\,dt.$$

12. Calcule a diferencial da função $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

13. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Mostre que, se f e g são funções diferenciáveis em U, então $f + g$, fg e f/g (se g nunca se anula em U) são funções diferenciáveis em U e valem as fórmulas

$$d(f+g) = df + dg, \qquad d(fg) = f\,dg + g\,df, \qquad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$$

Se $k \geqslant 1$ é inteiro, vale também

$$d(f^k) = k f^{k-1}\,df.$$

14. Mostre que

$$f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \|x\|$$

é diferenciável e calcule seu gradiente em todo ponto $p \neq 0$.

15. Considere as funções $f_i\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_i(x) = x_i/\|x\|$. Mostre que

$$x_1\,df_1 + \cdots + x_n\,df_n = 0.$$

16. Sejam $V_1, \ldots, V_k$ espaços vetoriais de dimensão finita. Uma função $f\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R}$ é dita *multilinear* se é linear em cada V_i, isto é:

$$\begin{aligned} &f(v_1, \ldots, u_i + \lambda w_i, \ldots, v_k) \\ &\qquad = f(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_k) + \lambda f(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

(a) Considerando normas apropriadas $\|\cdot\|_i$ em cada um dos espaços V_i, obtenha uma estimativa do tipo

$$|f(v_1, \ldots, v_k)| \leqslant C\|v_1\|_1 \cdots \|v_k\|_k,$$

onde C é uma constante e $v_i \in V_i$ são arbitrários.

(b) Mostre que toda função multilinear é diferenciável e calcule sua diferencial.

17. (Qualificação 2009) Uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada *homogênea de grau* 1 se, para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$ tivermos $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^n$, homogênea de grau 1.

(a) Seja $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e suponha que f é diferenciável em p. Mostre que, para qualquer $\lambda > 0$, f é diferenciável em λp e que $\nabla f(\lambda p) = \nabla f(p)$.

(b) Mostre que, se f é diferenciável em 0, então f é linear.

18. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Um *extremo local* de uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$ é um ponto $p \in U$ para o qual existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(p) = \max_{\|x-p\|<\varepsilon} f(x)$ ou $f(p) = \min_{\|x-p\|<\varepsilon} f(x)$. Mostre que, se f é diferenciável e $p \in U$ é um extremo local de f, então $\nabla f(p) = 0$.

19. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto convexo. Uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* se, para todos $p, q \in U$, vale

$$f((1-t)p + tq) \leqslant (1-t)f(p) + tf(q), \qquad t \in [0,1].$$

Mostre que, se f é convexa em U e diferenciável em um ponto $p \in U$, então, para todo $q \in U$, temos

$$f(q) - f(p) \geqslant df(p)(q-p). \tag{1}$$

Conclua que, se $\nabla f(p) = 0$, então p é um mínimo global de f em U.

20. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto convexo. Uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$ é dita *estritamente convexa* se, para todos $p, q \in U$ com $p \neq q$, vale

$$f((1-t)p + tq) < (1-t)f(p) + tf(q), \qquad t \in (0,1).$$

Mostre que, se f é estritamente convexa em U e diferenciável em p, então, para todo $q \in U$ com $q \neq p$, temos

$$f(q) - f(p) > df(p)(q-p). \tag{2}$$

[Dica: considere $g(x) \coloneqq f(x) - f(p) - df(p)(x-p)$ e observe que g também é estritamente convexa.]

21. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto convexo. Mostre a seguinte recíproca para os exercícios anteriores: se $f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto de U e satisfaz (1) (resp. (2)) para todos $p, q \in U$ (resp. com $p \neq q$), então f é convexa (resp. estritamente convexa).

Lista 3: desigualdade do valor médio e fórmulas de Taylor

26 de março de 2025

1. Seja $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Lembremos que a *norma de operador* de ℓ é definida por

$$\|\ell\| = \sup\{|\ell(v)| : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\}.$$

Mostre que, se $w \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\ell(v) = \langle w, v\rangle$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, então $\|\ell\| = \|w\|$. Conclua que, se f é uma função diferenciável em p, então $\|df(p)\| = \|\nabla f(p)\|$.

2. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C^1(U)$. Mostre que, se $K \subseteq U$ é compacto e convexo, então a restrição de f a K é uma função de Lipschitz.

3. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Mostre que, se $f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável e de Lipschitz em U, então a função

$$U \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \|df(x)\|$$

é limitada.

4. (Qualificação 2012, 2013, 2015) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que, se $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant M$ para todo $x \in U$ e $i = 1, \ldots, n$, então $f(\Omega)$ é limitado quando $\Omega \subseteq U$ é limitado e convexo.

5. Mostre que o teorema de Schwarz, visto em aula para funções de classe C^2, vale mais geralmente para funções duplamente diferenciáveis. (Ver E. L. Lima, *Curso de análise. Vol. 2* (décima segunda edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2020, §3.7.)

6. Seja $k \geqslant 1$ um inteiro. Mostre que, se f é k vezes diferenciável em p, então, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, vale

$$d^k f(p) v^{\otimes k} = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \partial^\alpha f(p)\, v^\alpha,$$

onde $\binom{k}{\alpha} = k!/(\alpha_1! \cdots \alpha_n!)$.

7. Mostre que, se $f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} c_\alpha x^\alpha$ é uma função polinomial que se anula em uma vizinhança da origem, então $c_\alpha = 0$ para todo α.

8. Um teorema visto em aula afirma que, se f é k vezes diferenciável e se anula à ordem $k+1$ na origem, então $f(v) = o(\|v\|^k)$ quando $v \to 0$. Deduza a fórmula de Taylor infinitesimal deste resultado. Em seguida,

use a fórmula de Taylor infinitesimal para mostrar que vale a volta do teorema. Conclua que a fórmula de Taylor infinitesimal é única, isto é, se f é k vezes diferenciável em p e $P_j(v)$ são funções polinomiais homogêneas de grau j em v tais que

$$f(p+v) = \sum_{j=0}^{k} P_j(v) + o(\|v\|^k), \qquad v \to 0,$$

então $P_j = d^j f(p)/j!$ para todo $j = 0, \ldots, k$.

9. Calcule a fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 7 na origem da função $\log(1/(1-\|x\|^2))$.

10. Calcule a matriz hessiana na origem da função do exercício anterior.

11. Encontre todas as derivadas parciais de ordem 2025 na origem da função $f(x,y) = e^{x^2+y^4}$.

12. Mostre, sem usar a fórmula de Taylor infinitesimal, que, nas fórmulas de Taylor com resto de Lagrange e resto integral de ordem k, os restos são funções $o(\|v\|^k)$ quando $v \to 0$.

13. (Qualificação 2010)

(a) Suponha que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seja tal que $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$ e seja $K > 0$ uma constante. Mostre que, se

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \leqslant K, \qquad \text{para todo } \|x\| \leqslant 1 \text{ e } i,j \in \{1,\ldots,n\},$$

então existem $C > 0$ e uma vizinhança da origem Ω tais que

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|^2, \qquad \text{para todo } x \in \Omega.$$

(b) Mostre que a recíproca do resultado contido no item (a) é falsa.

14. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma função $f \in C^\infty(U)$ é dita *analítica (real)* se, para todo $p \in U$, a *série de Taylor* de f em p converge *absolutamente* para f em uma vizinhança de p. Assim, podemos escrever

$$f(p+v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^j f(p)}{j!} v^{\otimes j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} v^\alpha$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$ suficientemente pequeno, ou, de maneira equivalente,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^j f(p)}{j!} (x-p)^{\otimes j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha f(p)}{\alpha!} (x-p)^\alpha$$

para todo x em uma vizinhança de p. Note que a convergência absoluta garante que não precisamos nos preocupar com a ordem da soma indexada nos multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$. O conjunto das funções analíticas em U é denotado $C^\omega(U)$. Exemplos de funções analíticas incluem as funções elementares, como polinômios, exponencial, logaritmo, seno, cosseno, etc.

(a) Mostre que a função

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ e^{-1/t}, & t > 0, \end{cases}$$

é de classe C^∞, mas não analítica.

(b) Seja $f \in C^\infty(U)$. Mostre que $f \in C^\omega(U)$ se, e somente se, para todo compacto $K \subseteq U$, existe uma constante $C \geqslant 0$ tal que

$$\sup_{x \in K} \frac{|\partial^\alpha f(x)|}{\alpha!} \leqslant C^{|\alpha|+1}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. [Dica: use a fórmula de Taylor com resto de Lagrange ou resto integral.]

(c) Mostre que $C^\omega(U)$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra e que, se $f \in C^\omega(U)$ não se anula em nenhum ponto de U, então $\frac{1}{f} \in C^\omega(U)$.

15. Uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita *homogênea* de grau k se $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demonstre a seguinte *identidade de Euler*: se f é homogênea de grau k e diferenciável em p, então

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + p_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = k f(p).$$

16. Lembremos que um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ é dito *simétrico* se permanece inalterado após uma permutação qualquer de suas variáveis. Por exemplo, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ é simétrico, mas $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ não é, pois $g(x_2, x_1) \neq g(x_1, x_2)$. Os *polinômios simétricos elementares*

$$\begin{aligned} s_1(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i = x_1 + \cdots + x_n \\ s_2(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ s_n(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 \cdots x_n \end{aligned}$$

são definidos pela fórmula

$$(y - x_1) \cdots (y - x_n) = y^n - s_1(x_1, \ldots, x_n) y^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Um teorema, geralmente atribuído a Newton, afirma que qualquer polinômio simétrico pode se escrever como um polinômio nos polinômios simétricos elementares. Por exemplo, $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = s_1(x_1, \ldots, x_n)^2 - 2s_2(x_1, \ldots, x_n)$. Em geral, não é fácil descrever uma fórmula explícita que exprime as somas de potências

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

como combinação dos polinômios simétricos elementares, mas a seguinte *identidade de Newton* fornece uma solução recursiva para este problema:

$$ks_k = s_{k-1}p_1 - s_{k-2}p_2 + \cdots + (-1)^{k-2}s_1p_{k-1} + (-1)^{k-1}s_0p_k,$$

onde $s_0 = 1$ e $s_i = 0$ para $i > n$. O objetivo deste exercício é demonstrar a identidade de Newton.

(a) Mostre que

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_n = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n).$$

(b) Utilizando o "operador de Euler" $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, mostre que

$$\frac{s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n}{s_0 + s_1 + \cdots + s_n} = \frac{x_1}{1 + x_1} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_n}.$$

(c) Conclua considerando as expansões de Taylor do termo à direita.

Lista 4: pontos críticos e otimização

1 de abril de 2025

1. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ seus autovalores. Mostre que A é definida positiva (resp. definida negativa) se, e somente se, $\lambda_i > 0$ (resp. $\lambda_i < 0$) para todo $i = 1, \ldots, n$.

2. Seja $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Mostre que a origem é um ponto crítico degenerado. Mostre que a restrição de f a qualquer reta pela origem tem mínimo local na origem, mas a origem *não* é um mínimo local de f. [Dica: considere os conjuntos onde $f > 0$ e $f < 0$.]

3. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $f \in C^2(U)$ e $p \in U$ um ponto crítico de f. Sejam $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p)$ e $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)$. Mostre que:

(a) Se $ac - b^2 < 0$, então p é um ponto de sela de f.

(b) Se $ac - b^2 > 0$ e $a > 0$, então p é um ponto de mínimo local de f.

(c) Se $ac - b^2 > 0$ e $a < 0$, então p é um ponto de máximo local de f.

O que você pode dizer sobre o caso $ac - b^2 = 0$?

4. Determine os extremos locais e globais de $f(x, y) = xy - xy^2 + x^2y$.

5. Estude os pontos críticos de $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$ e determine se f tem extremos locais ou globais.

6. (Qualificação 2006, 2013) Seja $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ o espaço das matrizes reais $n \times n$. Mostre que o máximo da função $f\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det(x)$ restrita à esfera $\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2 = n$ é atingido por uma matriz ortogonal e vale 1.

7. (Qualificação 2010, 2013)

(a) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Dizemos que um ponto crítico $a \in U$ é *não degenerado* quando a matriz hessiana de f em a é invertível. Mostre que, se $a \in U$ é um ponto crítico não degenerado, então a é um ponto crítico isolado.[6]

(b) Mostre que a recíproca do resultado contido no item anterior é falsa, mesmo no caso em que f não é constante.

8. (Qualificação 2012) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto convexo.

[6] Dica (não estava na qualificação): obtenha primeiro a equação $\nabla f(a+v) = Hf(a)v + o(\|v\|)$, quando $v \to 0$.

(a) Mostre que, se f é convexa de classe C^2, então sua forma quadrática hessiana é não negativa em todos os pontos de U (isto é, $\langle Hf(x)v, v\rangle \geqslant 0$ para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$). [Sugestão: considere a função $\varphi(t) = f(x + tv)$ com $x \in U$, $x + v \in U$ e $t \in [0, 1]$. Depois, use o fato que, no caso $n = 1$ e f de classe C^2, ser convexa é equivalente a $f''(t) \geqslant 0$ para todo t em U.]

(b) Mostre que, se f é convexa e de classe C^2, então todo ponto crítico de f é um ponto de mínimo global.

9. (Qualificação 2009) Seja Ω um aberto convexo em $\mathbb{R}^n$ e $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, estritamente convexa em Ω, isto é, uma função cuja hessiana é definida positiva em todo ponto de Ω. Mostre que a aplicação $\nabla F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ é injetiva.

10. Determine os extremos locais da função $f(x, y, z) = x\log(x) + y\log(y) + z\log(z)$ restrita ao plano $x + y + z = 2025$.

11. (Qualificação 2018) Seja $S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ a esfera de raio r centrada na origem.

(a) Calcule o maior valor da função $f(x) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ com $x \in S(0, r)$.

(b) Mostre que, se a, b, c são números reais não negativos, então $(abc)^{1/3} \leqslant (a + b + c)/3$.

12. (Qualificação 2019) Dados $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ positivos tais que $1/p + 1/q = 1$, sejam $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \qquad g(x, y) = xy.$$

(a) Sejam $c > 0$ (uma constante positiva arbitrária) e (x_c, y_c) o ponto de mínimo da função f restrita à curva definida pela equação $g(x, y) = c$. Usando multiplicadores de Lagrange, mostre que $x_c^p = y_c^q$.

(b) Usando o item anterior, mostre que $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ para todos $x, y \geqslant 0$.

13. (Qualificação 2023) Ache os valores máximo e mínimo de z onde (x, y, z) satisfazem aos vínculos $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ e $x + y + 2z = 0$.

14. Determine os extremos locais da função $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada pelo produto interno euclidiano $f(x, y) = \langle x, y\rangle$, restrita à esfera unitária $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$. Deduza a desigualdade de Schwarz.

Lista 5: aplicações diferenciáveis e regra da cadeia

25 de abril de 2025

1. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(t,s) = (t\cos(2\pi s), t\,\mathrm{sen}(2\pi s), 1-t).$$

(a) Mostre que a imagem de F é um cone com vértice $e_3 = (0,0,1)$. Qual é a imagem do quadrado $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant t, s \leqslant 1\}$?

(b) Calcule o posto da matriz jacobiana $JF(t,s)$ para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z) \neq 0\}$ e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Denote $r = \|(x,y,z)\|$. Mostre que, para quaisquer $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$, a função

$$f\colon U \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z,t) = \frac{\varphi(r-ct) + \psi(r+ct)}{r}$$

satisfaz a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right).$$

Tais soluções são ditas *ondas esféricas*.

3. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F, G\colon U \to \mathbb{R}^m$ aplicações diferenciáveis em $p \in U$. Mostre que

$$\langle F, G\rangle : U \to \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \langle F(x), G(x)\rangle$$

é diferenciável em p e

$$\nabla \langle F, G\rangle (p) = JF(p)^t \cdot G(p) + JG(p)^t \cdot F(p).$$

Na fórmula acima, A^t denota a transposta de uma matriz A e estamos identificando vetores com matrizes coluna.

4. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Calcule o jacobiano da aplicação gradiente $\nabla f\colon U \to \mathbb{R}^n$.

5. Seja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 tal que $F(0) = 0$. Mostre que existem aplicações *contínuas* $G_1, \ldots, G_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que

$$F(x) = x_1 G_1(x) + \cdots + x_n G_n(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

e $G_i(0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0)$ (*lema de Hadamard*). [Dica: dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere $c_x(t) = F(tx)$, $t \in [0,1]$, e use o teorema fundamental do cálculo.]

6. Demonstre a seguinte *desigualdade do valor médio para aplicações*: sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$; se F é diferenciável em todo ponto de um subconjunto convexo $K \subseteq U$ e $C \geqslant 0$ é uma constante tal que $\|DF(x)\| \leqslant C$ para todo $x \in K$, então

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant C\|x - y\|$$

para todos $x, y \in K$.

7. (Qualificação 2022) Forneça um contraexemplo para a seguinte generalização ingênua do teorema do valor médio: *"dada uma aplicação diferenciável $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$, existe um ponto c no segmento que liga x a y tal que $F(x) - F(y) = DF(c)(x - y)$".*

8. (Qualificação 2016) Seja $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 em um aberto U de $\mathbb{R}^n$. Mostre que, se $DF(a) = 0$, onde $a \in U$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\|F(x) - F(y)\| \leqslant \|x - y\|$ para todos $x, y \in B(a, \varepsilon)$.

9. Determine se a seguinte questão da Qualificação 2006 está correta: *"Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado. Se $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 com determinante jacobiano não nulo em todo ponto de Ω, mostre que existem $c > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\|F(x) - F(y)\| \geqslant c\|x - y\|$ se $\|x - y\| < \delta$ e $x, y \in \Omega$."*

10. (Qualificação 2010) Sejam $0 < \theta_1 < \theta_2 < \infty$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Suponha que

$$\|F(x) - F(y)\|^{\theta_1} \leqslant K\|x - y\|^{\theta_2}$$

para todos $x, y \in U$, onde $K > 0$ é uma constante. Mostre que F é constante em U.

11. Generalize a questão 16 da lista 2 para aplicações. Ou seja, se $V_1, \ldots, V_k, V$ são espaços vetoriais de dimensão finita, mostre que toda aplicação multilinear $F\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to V$ é diferenciável e calcule a sua diferencial.

12. Calcule a diferencial do produto de matrizes

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times p}(\mathbb{R}) \to M_{m\times p}(\mathbb{R}), \qquad (A, B) \longmapsto AB.$$

13. (Qualificação 2011)

(a) Se $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo (de espaços vetoriais), mostre que

$$\|Tv\| \geqslant \frac{\|v\|}{\|T^{-1}\|}.$$

(b) Se $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x_0 \in U$ e $DF(x_0)$ é um isomorfismo, mostre que existem constantes positivas δ e c tais que

$$\|v\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|F(x_0+v) - F(x_0)\| \geqslant c\|v\|.$$

14. (Qualificação 2017, 2022) Seja $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis.

(a) Mostre que $GL_n(\mathbb{R})$ é aberto em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que a aplicação $F\colon GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $F(X) = X^{-1}$, é diferenciável e calcule $DF(X)$.

(c) Se $n = 2$ e $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{smallmatrix}\right)$, exiba a matriz 2×2 dada por $DF(A)A$.

15. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $A\colon I \to GL_n(\mathbb{R})$ um caminho diferenciável (isto é, $A(t)$ são matrizes invertíveis dependendo, de maneira diferenciável, de um parâmetro real t). Mostre que, em I, vale

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

16. Lembremos que uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita uma *isometria* se L preserva o produto interno euclidiano: $\langle Lv, Lw\rangle = \langle v, w\rangle$ para todos $v, w \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que, se A é a matriz de L na base canônica, L é uma isometria se, e somente se, A é uma matriz ortogonal (isto é, as colunas de A formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$).

Uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita *conforme* se L é injetiva e L preserva ângulos:

$$\frac{\langle Lv, Lw\rangle}{\|Lv\|\|Lw\|} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

(b) Mostre que L é conforme se, e somente se, existe uma constante $\mu > 0$ tal que $\mu^{-1}L$ é uma isometria. Em particular, a matriz de uma transformação conforme é da forma μA, onde A é uma matriz ortogonal. [Dica: dados $u, u' \in S^{n-1}$, os vetores $u + u'$ e $u - u'$ são sempre ortogonais. Use isto para concluir que, se L é conforme, então $u \mapsto \|Lu\|$ é constante sobre a esfera.]

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ é dita *conforme* se $DF(p)$ é uma transformação linear conforme para todo $p \in U$.

(c) Mostre que F é conforme se, e somente se, existe uma função $\mu\colon U \to (0,\infty)$ tal que, para todo $p \in U$:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(p), \frac{\partial F}{\partial x_j}(p) \right\rangle = 0 \quad \text{para todos } i \neq j \qquad \text{e}$$
$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) \right\| = \mu(p) \quad \text{para todo } i.$$

(d) Mostre que, se F é conforme, então $\mu(p) = |\det JF(p)|^{1/n}$.

(e) Seja $n = 2$ e denote $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Suponha que F *preserva orientação* em todo ponto, isto é, $\det JF(p) > 0$ para todo $p \in U$. Mostre que F é conforme se, e somente se, u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[Dica: uma matriz ortogonal 2×2 com determinante positivo é uma matriz de rotação.] Conclua que aplicações conformes no plano, que preservam orientação, correspondem a funções holomorfas $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tais que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

17. Seja $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear de matriz $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f \in C^2(U)$. Mostre que, se $g = f \circ L$, então

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \circ L$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$.

18. Com a notação do exercício anterior, mostre que, se L é uma isometria, então

$$\Delta g = \Delta f \circ L,$$

isto é, o laplaciano $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ é invariante por isometrias.

Lista 6: difeomorfismos, formas locais, teorema da função implícita

16 de maio de 2025

1. (Qualificação 2006) Mostre que toda submersão $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 definida num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, com $n > m$, é uma aplicação aberta (isto é, se $A \subseteq U$ é aberto, então $F(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ é aberto).

2. (Qualificação 2007) Considere um planeta com órbita elíptica $x = a\cos\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$. Supondo que o sol está situado no foco $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ e que t é o tempo medido desde o instante que o planeta passa pelo ponto $(a, 0)$, então a equação de Kepler satisfeita é:

$$kt = \theta - \varepsilon \operatorname{sen}\theta,$$

em que $k > 0$ é uma constante e $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ (a excentricidade da órbita), com $0 < b < a$.

(a) Mostre que a equação de Kepler pode ser resolvida para θ em função de t.

(b) Mostre que $\frac{d\theta}{dt}$ assume o máximo no periélio $(a, 0)$ e o mínimo no afélio $(-a, 0)$.

3. (Qualificação 2007) Seja $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k, com $k \geqslant 1$, tal que $\|DG(x)\| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que a aplicação $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x) = x + G(x)$ é um difeomorfismo de classe C^k sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que, se existe uma constante $\lambda > 0$ tal que $\|DG(x)\| \leqslant \lambda < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então a aplicação F do item (a) é sobrejetiva.

(c) Exiba um contraexemplo que mostre que não basta supor que $\|DG(x)\| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ para garantir que F definida no item (a) seja sobrejetiva.

4. (Qualificação 2007) Mostre que uma submersão injetora de classe C^1 (definida num aberto de $\mathbb{R}^n$) é um difeomorfismo sobre a sua imagem.

5. (Qualificação 2008)

(a) Mostre que a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3$ é uma aplicação aberta mas não é uma submersão.

(b) Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ que seja injetiva mas não seja uma imersão. Justifique.

6. (Qualificação 2008) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e considere uma aplicação continuamente diferenciável

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$$

tal que, para um certo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in U$, tem-se que $D\psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é injetiva.

(a) Mostre que, para algum par (i, j), com $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $i < j$, existe um aberto $V \subseteq U$, com $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in V$, e tal que a aplicação definida para $(x_1, x_2) \in V$ por $h(x_1, x_2) = (\psi_i(x_1, x_2), \psi_j(x_1, x_2))$ é um difeomorfismo C^1 sobre um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Suponha por simplicidade que o resultado do item (a) valha para $i = 1$ e $j = 2$. Mostre que, para todo $(x_1, x_2) \in V$, existe um único $(y_1, y_2) \in W$ e uma aplicação $f = (f_1, f_2) \colon W \to \mathbb{R}^2$ tal que $\psi(x_1, x_2) = (y_1, y_2, f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2))$. Em outras palavras, mostre que $\psi(V)$ é o gráfico de $f \colon W \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

7. (Qualificação 2009) Sejam F e G aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, de classe C^1, e suponha que $F(0) = 0$ e que $DF(0)$ é invertível. Para cada $r \in \mathbb{R}$, defina $H_r(x) = F(x) + rG(x)$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $|r| < \varepsilon$, H_r se anula em um ponto x_r, e que $\lim_{r \to 0} x_r = 0$. [Sugestão: forma local das submersões.]

8. (Qualificação 2010)

(a) Demonstre o teorema da aplicação inversa usando o teorema do posto.

(b) Considere o seguinte sistema definido no aberto $U = (-1, 1)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{40} x_1^4 + \frac{1}{5} \log(x_2 + e^2) = a_1 \\ x_2 + \frac{1}{7} \operatorname{sen}(x_1) + 1 = a_2. \end{cases}$$

Mostre que o sistema acima tem uma única solução $x = (x_1, x_2) \in U$ quando $a_1 = \frac{2}{5}$ e $a_2 = 1$.

9. (Qualificação 2010)

(a) Demonstre o teorema da função implícita usando o teorema do posto.

(b) Mostre que, se $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^1, então f não é injetora.

(c) (Qualificação 2013) Mostre que, se $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então f não é sobrejetiva.

10. (Qualificação 2012)

(a) Mostre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.

(b) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1. Mostre que, se existe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que o conjunto $F^{-1}(y_0)$ possui um ponto de acumulação $x_0 \in U$, então $DF(x_0)$ não é injetiva.

11. (Qualificação 2014)

(a) Enuncie o teorema da função inversa.

(b) Enuncie a forma local das submersões.

(c) Demonstre a forma local das submersões usando o teorema da função inversa.

12. (Qualificação 2015) Seja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada pela equação $F(x) = \|x\|^2 x$.

(a) Mostre que F é uma aplicação de classe C^∞ que leva a bola aberta $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ nela mesma, de forma bijetiva.

(b) Calcule a matriz jacobiana $JF(x)$ e a transformação derivada $DF(x)v$ para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^n$.

(c) Mostre que F leva uma bola centrada em $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ em um conjunto aberto.

(d) Mostre que a inversa de F não é diferenciável na origem.

13. (Qualificação 2015) Seja F um difeomorfismo de classe C^1. Mostre que, se F é uma aplicação de classe C^k, então F é um difeomorfismo de classe C^k.

14. (Qualificação 2016) Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x) = \big(e^{2x_1+x_2},\, 3x_2 - \cos(x_1),\, x_1^2 + x_2 + 2\big),$$
$$g(y) = \big(3y_1 + 2y_2 + y_3^2,\, y_1^2 - y_3 + 1\big)$$

e $F = g \circ f$. Mostre que F é invertível numa vizinhança de 0 e calcule a matriz jacobiana $(JF^{-1})(F(0))$.

15. (Qualificação 2017) Seja $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1.

(a) Quando F é uma imersão? Quando F é uma submersão? Dê exemplos.

(b) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = (x + y + z,\, x^2 + y^2 + z^2,\, x^3 + y^3 + z^3).$$

Descreva o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ onde F tem posto constante igual a 3.

(c) Suponha que F tem posto constante. Mostre que F é localmente injetiva se, e somente se, F é uma imersão.

16. (Qualificação 2017)

(a) Enuncie o teorema da função inversa e da função implícita.

(b) É verdade que, se uma aplicação $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 é localmente invertível em p, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, então ela é bijetiva? Mostre ou dê um contraexemplo.

(c) Mostre que o sistema

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ wxy - xyz = 0 \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos de $w = w(y,z)$ e $x = x(y,z)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z,w) = (1,2,1,1)$. Calcule as derivadas parciais de w e x nestes pontos.

17. (Qualificação 2017) Prove o *lema de Morse*. Seja $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^∞ e seja $p \in U$ um ponto crítico não degenerado de f com $f(p) = 0$. Mostre que existe um difeomorfismo local φ em p tal que

$$(f \circ \varphi^{-1})(x) = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

onde λ é o índice do ponto crítico, ou seja, a dimensão máxima do subespaço onde a restrição da hessiana é definida negativa.

18. (Qualificação 2017) Seja $U \subseteq L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ um subconjunto aberto. Mostre que $\det\colon U \to \mathbb{R}$ é uma submersão se, e somente se, nenhuma matriz em U tem posto menor ou igual a $n-2$.

19. (Qualificação 2018) Seja $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e suponha que exista $M > 0$ tal que

$$\|G(x) - x\| \leqslant M\|x\|^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que G é localmente invertível perto da origem e calcule $DG(0)$.

20. (Qualificação 2018) Seja p um polinômio com coeficientes reais e grau maior ou igual a 1. Defina a aplicação $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $F(x,y) = (p(x+y), p(x-y))$. Prove que existe um conjunto aberto e denso de pontos de $\mathbb{R}^2$ para os quais a aplicação F é um difeomorfismo local quando restrita a alguma vizinhança de cada um desses pontos.

21. (Qualificação 2019) Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $f\colon U \to \mathbb{R}^{m+n}$ uma imersão de classe C^k, $k \geqslant 1$. Mostre que, para todo ponto $p \in U$, existe um aberto $V \subseteq U$ contendo p tal que $f|_V\colon V \to f(V)$ é um homeomorfismo e $(f|_V)^{-1}$ é a restrição de uma aplicação de classe C^k definida num aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$.

22. (Qualificação 2019) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com $f(2,-1) = -1$. Defina

$$\begin{cases} G(x,y,u) = f(x,y) + u^2 \\ H(x,y,u) = ux + 3y^3 + u^3 \end{cases}$$

(a) Encontre $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} G(x,y,u) = 0 \\ H(x,y,u) = 0 \end{cases}$$

tem solução $(x,y,u) = (2,-1,\alpha)$.

(b) Sob quais condições existem funções $x = g(y)$ e $u = h(y)$, de classe C^1 e definidas em abertos de $\mathbb{R}$, tais que $G(g(y),y,h(y)) = 0$ e $H(g(y),y,h(y)) = 0$ com $g(-1) = 2$ e $h(-1) = \alpha$? Enuncie detalhadamente todos os teoremas necessários.

(c) Nas condições encontradas em (b), supondo $Df(2,-1) = (1,-3)$, encontre $g'(-1)$ e $h'(-1)$. Enuncie detalhadamente todos os teoremas necessários.

23. (Qualificação 2021 e 2023) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leqslant k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\varphi(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo.

24. (Qualificação 2021) Seja $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação de classe C^k com $k \geqslant 1$ e U aberto. Mostre que se, para todo $x \in U$ vale que

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \neq 0,$$

então todo $x \in U$ admite uma vizinhança $W \subseteq U$ tal que $F(W)$ é o gráfico de uma função $y_{n+1} = \varphi(y_1, \ldots, y_n)$ de classe C^k.

25. (Qualificação 2021) Seja $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^1 e seja $p = (1,2,-1,3,0)$. Suponha que $F(p) = 0$ e que

$$JF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que existe uma aplicação $G\colon U \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, definida num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que

$$F(x_1, G_1(x), G_2(x), x_2, x_3) = 0$$

para $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ e $G(1,3,0) = (2,-1)$.

(b) Calcule $JG(1, 3, 0)$.

(c) Dê um exemplo de uma aplicação F que satisfaça o enunciado e encontre a correspondente aplicação G do item (a).

26. (Qualificação 2021)

(a) Defina o posto de uma aplicação diferenciável $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em um ponto $x \in U$.

(b) Dada $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, mostre que existe um aberto denso $V \subseteq U$ onde o posto de F é constante em toda componente conexa de V.

27. (Qualificação 2022) Seja $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

(a) Mostre que o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ onde $DF(x)$ possui posto n é aberto.

(b) Use o teorema da função inversa para mostrar que $F(S)$ também é aberto.

28. (Qualificação 2022) Prove que não existe um difeomorfismo de classe C^1 de um aberto de $\mathbb{R}^n$ num aberto de $\mathbb{R}^m$ se $m < n$.

29. (Qualificação 2022) Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} xy + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

(a) Esboce o lugar geométrico dos pontos que satisfazem cada uma das equações do sistema. Use seu esboço para estudar se o sistema possui solução.

(b) Use o teorema da função implícita para mostrar que o sistema pode ser resolvido, digamos com $x = \varphi(z)$ e $y = \psi(z)$ na vizinhança de $(1, 2, 1)$.

(c) Encontre dx/dz no ponto $(1, 2, 1)$.

Lista 7: variedades diferenciáveis

17 de junho de 2025

1. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Mostre que, se $G\colon U \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^k, com $k \geqslant 1$, que é uma submersão em todo ponto do conjunto $M = \{p \in U : G(p) = 0\}$, então M é uma variedade de classe C^k e dimensão $n - m$.

2. Em aula, definimos apenas a noção de "variedade de dimensão d". Mais geralmente, dizemos que um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade de classe C^k (com $k \geqslant 1$) se, para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de p e um número natural d_p tal que $U \cap M$ é C^k-difeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^{d_p}$. O natural d_p é dito *dimensão de M em p*. Assim, uma variedade de dimensão d é uma variedade tal que $d_p = d$ para todo p.

(a) Certifique-se que d_p está bem definido.

(b) Mostre que a função $M \to \mathbb{N}$, $p \mapsto d_p$, é localmente constante.

3. Mostre que, se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ e $N \subseteq \mathbb{R}^m$ são variedades de classe C^k, com $k \geqslant 1$, então o produto $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ é uma variedade de classe C^k e dimensão $\dim M + \dim N$.

4. Mostre que um subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão 0 se, e somente se, M é discreto.

5. Seja $k \geqslant 1$, M uma variedade de classe C^k e $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k. Mostre que $df(p) = 0$ para todo $p \in M$ se, e somente se, f é localmente constante.

6. (Qualificação 2021) Dado $R > 0$, considere a esfera de raio R centrada na origem $S_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = R\}$, com $n \geqslant 2$. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que f restrita a S_R é constante para todo $R > 0$ se, e somente se, existe uma função contínua $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x) = g(x)x$.

7. Determine uma parametrização do toro em $\mathbb{R}^3$ obtido pela revolução em torno do eixo z de um círculo, no plano yz, de raio r e centro a uma distância R da origem, com $0 < r < R$. Mostre que esta variedade é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^3$ definida por uma equação explícita. Calcule os seus espaços tangentes.

8. Sejam M e N variedades de classe C^k, com $k \geqslant 1$. Mostre que uma aplicação $F\colon M \to N$ é de classe C^k (de acordo com a definição da aula) se, e somente se, $F \circ \psi\colon V \to N \subseteq \mathbb{R}^m$ é de classe C^k para toda parametrização local $\psi\colon V \to M \cap U$ de M.

9. Seja $F\colon M \to N$ uma aplicação de classe C^k entre variedades de classe C^k. Mostre que, se $v \in T_pM$ é um vetor da forma $v = c'(0)$ para algum caminho $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ de classe C^1, com $c(0) = p$, então

$$DF(p)c'(0) = (F \circ c)'(0).$$

10. (Qualificação 2019) Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e $M \subseteq \mathbb{R}^n$ uma variedade de classe C^k, com $k \geqslant 1$, que não contém a. Mostre que, se $p \in M$ é o ponto mais próximo de a, então o vetor $a - p$ é normal a M em p.[7]

11. Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^n$ e $N \subseteq \mathbb{R}^m$ variedades de classe C^k, com $k \geqslant 1$. Demonstre o teorema da função inversa para variedades, isto é, se $F\colon M \to N$ é uma aplicação de classe C^k e $p \in M$ é tal que $DF(p)\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo de espaços vetoriais, então existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de p e uma vizinhança $U' \subseteq \mathbb{R}^m$ de $F(p)$ tais que F é um difeomorfismo C^k de $U \cap M$ sobre $U' \cap N$.

12. Mostre que um toro de revolução em $\mathbb{R}^3$ é difeomorfo a $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$.

13. Demonstre o teorema das "fibras de posto constante": se M e N são variedades de classe C^k, com $k \geqslant 1$, e $F\colon M \to N$ é uma aplicação de classe C^k de posto constante igual a r em uma vizinhança de uma fibra $F^{-1}(q)$, com $q \in N$, então $F^{-1}(q)$ é uma variedade de dimensão $\dim M - r$.

14. Verifique que o conjunto de matrizes ortogonais

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AA^t = A^tA = I\}$$

é uma variedade compacta de classe C^∞ e dimensão $n(n-1)/2$. Calcule o espaço tangente na matriz identidade $T_IO(n)$.

15. (Qualificação 2007) Considere a aplicação $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Dada uma curva regular[8] $\Gamma \subseteq F(S^2)$, mostre que para cada $p \in \Gamma$ existe uma vizinhança aberta $W \subseteq \mathbb{R}^4$ de p tal que $\Gamma \cap W$ é imagem de uma curva regular em S^2.

16. (Qualificação 2021) Seja $F\colon U \to U$ uma aplicação de classe C^k, com $k \geqslant 1$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo. Mostre que, se $F \circ F = F$, então F tem posto constante numa vizinhança de $M = F(U)$. Conclua que M é uma variedade de classe C^k.

17. Demonstre a seguinte versão mais geral do teorema dos multiplicadores de Lagrange. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $f\colon U \to \mathbb{R}$ uma função de classe

[7] Isto é, $\langle a - p, v\rangle = 0$ para todo $v \in T_pM$.

[8] Aqui, curva regular significa uma variedade de dimensão 1.

C^1 e $G = (G_1, \ldots, G_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1. Seja $q \in \mathbb{R}^m$ um valor regular de G e $M = G^{-1}(q)$. Mostre que um ponto $p \in M$ é um ponto crítico da restrição $f|_M$ se, e somente se, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$df(p) = \lambda_1\, dG_1(p) + \cdots + \lambda_m\, dG_m(p).$$

18. Sejam M e N variedades de mesma dimensão de classe C^k, com $k \geqslant 1$, e suponha que M seja compacta. Mostre que, se $F\colon M \to N$ é uma aplicação de classe C^k e $q \in N$ é um valor regular de F, então $F^{-1}(q)$ é finito. Mostre ainda que, se $R \subseteq N$ denota o conjunto dos valores regulares, então R é aberto e a função

$$R \to \mathbb{N}, \qquad q \mapsto \operatorname{card} F^{-1}(q)$$

é localmente constante.

19. O objetivo deste exercício é demonstrar o teorema fundamental da álgebra, que afirma que todo polinômio não constante $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, com coeficientes complexos $a_i \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$ e $a_n \neq 0$, tem pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$.

(a) Identifique o plano complexo $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e o polinômio p com uma aplicação $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Seja $\pi_N\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica a partir do polo norte. Mostre que a aplicação $\pi_N^{-1} \circ p \circ \pi_N$ se estende, de maneira única, a uma aplicação contínua $F\colon S^2 \to S^2$.

(b) Considere a projeção estereográfica $\pi_S\colon S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$ a partir do polo sul e mostre que a aplicação de "transição de cartas"

$$\pi_N \circ \pi_S^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

corresponde à função complexa $z \mapsto 1/\bar{z}$.

(c) Mostre que a aplicação $\pi_S \circ F \circ \pi_S^{-1}$, definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^2$ (que corresponde ao polo norte N), corresponde à função racional com coeficientes complexos

$$q(z) = \frac{z^n}{\bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n}$$

e conclua que a aplicação $F\colon S^2 \to S^2$ do item (a) é diferenciável de classe C^∞.

(d) Mostre que F tem apenas um número finito de pontos críticos, que correspondem às raízes da derivada $p'(z)$ e, se $n \geqslant 2$, ao polo norte N.

(e) Mostre que o conjunto $R \subseteq S^2$ dos valores regulares de F é um aberto conexo e que, portanto, o número de elementos nas fibras de todo ponto em R é constante.

(f) Conclua que F é sobrejetiva (logo, existe um elemento na fibra de 0, isto é, uma raiz de p).

(g) Por que um argumento análogo, usando polinômios reais no lugar de polinômios complexos e S^1 no lugar de S^2, não funciona para mostrar que todo polinômio com coeficientes reais tem uma raiz real?

Lista 8: formas diferenciais e integração

1 de julho de 2025

1. Seja $V_n(r)$ o volume da bola fechada de raio r em $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que existem constantes c_n tais que $V_n(r) = c_n r^n$.

(b) Demonstre (de maneira independente) as seguintes fórmulas recursivas para c_n:

$$c_n = \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta \right) c_{n-1} \qquad \text{e} \qquad c_n = \frac{2\pi}{n} \, c_{n-2}.$$

(c) Usando qualquer uma das duas fórmulas, mostre que

$$V_{2k+1}(r) = 2 \, \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \, r^{2k+1}, \qquad V_{2k}(r) = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} \, r^{2k},$$

onde $m!! = \prod_{i=0}^{\lceil m/2 \rceil - 1} (m - 2i)$. É também possível dar uma fórmula que não depende da paridade, usando a função Γ de Euler:

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)} \, r^n.$$

(d) Conclua que $V_n(1)$ tende para 0 quando n tende a infinito.

2. Considere a $(n-1)$-forma $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Mostre que $d\omega = n \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

(b) Use o teorema de Stokes para obter uma fórmula para o volume $(n-1)$-dimensional da esfera de raio r em $\mathbb{R}^n$.

3. Use o teorema de Fubini para mostrar o teorema de Schwarz (sobre a ordem das derivadas de ordem 2 de uma função de classe C^2).

4. Sejam $F \colon M \to N$ e $G \colon N \to P$ aplicações suaves entre variedades suaves e $\omega \in \Omega^k(P)$ uma k-forma diferencial em P. Mostre que

$$F^*(G^*\omega) = (G \circ F)^* \omega.$$

5. Considere as seguintes 1-formas em $\mathbb{R}^2$: $\omega_1 = dx$, $\omega_2 = x \, dy$ e $\omega_3 = d(r^2)$, onde $r^2 = x^2 + y^2$. Calcule os valores de ω_i nos seguintes vetores tangentes:

(a) $u = (0, 1) \in T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$,

(b) $v = (-1, -1) \in T_{(2,2)}\mathbb{R}^2$,

(c) $w = (1, -1) \in T_{(2,2)}\mathbb{R}^2$.

6. Sejam M uma variedade suave de dimensão m, $U \subseteq M$ um aberto e $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \colon U \to \mathbb{R}$ funções suaves. Mostre que as seguintes propriedades são equivalentes:

(a) todo ponto de U possui uma vizinhança aberta $U' \subseteq U$ tal que $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)|_{U'} \colon U' \to \mathbb{R}^m$ é uma carta local de M;

(b) para toda 1-forma $\omega \in \Omega^1(U)$, existem únicos $f_i \in C^\infty(U)$ tais que

$$\omega = f_1\, d\varphi_1 + \cdots + f_m\, d\varphi_m.$$

7. Calcule o pullback da 2-forma $dx \wedge dy$ em $\mathbb{R}^2$ pela aplicação

$$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta).$$

8. Considere as seguintes 2-formas em $\mathbb{R}^2$:

$$\omega_1 = dx \wedge dy, \qquad \omega_2 = x\, dx \wedge dy - y\, dy \wedge dx \qquad \text{e} \qquad \omega_3 = r\, dr \wedge d\theta,$$

onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Calcule os valores de ω_i nos seguintes pares de vetores tangentes:

(a) $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (1, 1)$ em $T_{(1,1)}\mathbb{R}^2$,

(b) $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (0, 1)$ em $T_{(0,1)}\mathbb{R}^2$,

(c) $w_1 = (-1, 0)$ e $w_2 = (0, 1)$ em $T_{(1,2)}\mathbb{R}^2$.

9. Em $\mathbb{R}^3$, calcule o valor das 2-formas $\omega_1 = dy \wedge dz$, $\omega_2 = x\, dz \wedge dy$ e $\omega_3 = dz \wedge d(r^2)$, onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, no par de vetores tangentes $v_1 = (1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 2, 3)$ no ponto $p = (2, 0, 0)$.

10. Seja M uma 3-variedade suave e (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) dois sistemas de coordenadas definidos num mesmo aberto U. Dada uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(U)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\omega &= f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2 \\ &= g_1\, dy_2 \wedge dy_3 + g_2\, dy_3 \wedge dy_1 + g_3\, dy_1 \wedge dy_2.\end{aligned}$$

Descreva g_1, g_2, g_3 em função de f_1, f_2, f_3.

11. (Qualificação 2006) Seja $f \colon A \to \mathbb{R}$ uma função contínua no bloco $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que o gráfico de f tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.

12. (Qualificação 2023) Defina uma 1-forma ω em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ por:

$$\omega = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy.$$

Calcule a integral de ω ao longo de um círculo de raio r centrado na origem. Essa forma é exata? Mostre que o campo de vetores

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

não é o gradiente de nenhuma função.

13. (Qualificação 2023) Seja $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $\langle G(x), x\rangle > 0$ para todo x com $\|x\| = 1$. Mostre que não existe $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 tal que $G = \operatorname{rot}(F)$.

14. (Qualificação 2022) Seja M uma k-variedade compacta orientada em $\mathbb{R}^n$. Sejam $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria[9] e $N = h(M)$. Seja $f\colon N \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que N é uma k-variedade compacta orientada em $\mathbb{R}^n$ e

$$\int_N f\, dV = \int_M (f \circ h)\, dV,$$

onde dV denota a forma volume. Conclua que M e N têm o mesmo volume.

15. (Qualificação 2022) Considere a variedade (com bordo)

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 1/2\}$$

e a 2-forma $\beta = 2x\, dx \wedge dz + 2z\, dy \wedge dz$.

(a) Encontre uma forma α tal que $\beta = d\alpha$.

(b) Exiba uma parametrização de ∂M.

(c) Calcule $\int_M \beta$.

16. (Qualificação 2021) Enuncie o teorema de Green e o utilize para provar que não existe solução periódica não constante para o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + x(t)^5 \\ y'(t) = -y(t) + y(t)^5, \end{cases}$$

isto é, que não existe uma curva fechada não constante $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfazendo o sistema de equações.

17. (Qualificação 2019) Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4,\ y \geqslant 0\}$ e $\omega = y\, dx + 3x\, dz$.

[9] Isto é, h é um difeomorfismo tal que $Jh(x)$ é uma matriz ortogonal para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Calcule $\int_{\partial M} \omega$ diretamente (sem utilizar o teorema de Stokes).

(b) Calcule $\int_M d\omega$.

18. (Qualificação 2019) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\cos(x)}{2}, & x \in [-\pi, \pi], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $\{\varphi_j\}_{j\geqslant 1}$ a família de funções dada por $\varphi_{2m+1}(x) = f(x - m\pi)$ $(m \geqslant 0)$ e $\varphi_{2m}(x) = f(x + m\pi)$ $(m \geqslant 1)$. Por exemplo, $\varphi_3(x) = f(x - \pi)$ e $\varphi_4(x) = f(x + 2\pi)$.

(a) Defina partição da unidade associada a uma coleção de abertos de $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que $\{\varphi_j\}_{j\geqslant 1}$ é uma partição da unidade (de classe C^1) em $\mathbb{R}$.

19. Mostre que uma variedade M é orientável (isto é, M admite uma forma de orientação) se, e somente se, existe um atlas $\{\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^m\}_{i\in I}$ de M tal que $\det J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) > 0$ para todos $i, j \in I$.

20. (Qualificação 2018) Seja $B(n, r)$ a bola de raio r em $\mathbb{R}^n$. Note que $\operatorname{vol} B(2, r) = \pi r^2$ e $\operatorname{vol} B(3, r) = 4\pi r^3/3$, como aprendemos no colégio. Mostre que $\operatorname{vol} B(4, r) = \pi^2 r^4/2$. [Dica: parametrize a bola por coordenadas esféricas e use o teorema de Stokes.]

21. (Qualificação 2017) Considere a 2-forma em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dada por

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(a) ω é fechada?

(b) Mostre que $\int_{S^2} \omega = 4\pi$, onde S^2 tem a orientação de bordo da bola unitária.

(c) ω é exata?

22. (Qualificação 2017)

(a) Calcule $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi)\, d\theta\, d\varphi$.

(b) Seja $T^2 = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ o toro descrito por

$$T^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}.$$

Calcule $\int_{T^2} xyz\, dw \wedge dy$.

23. (Qualificação 2016) Seja M uma n-variedade em $\mathbb{R}^{n+k}$. Mostre que, se existem k campos de vetores $v_1, \ldots, v_k$ em $\mathbb{R}^{n+k}$ contínuos normais a M ($v_j(p) \perp T_pM$ para todo $p \in M$, $j = 1, \ldots, k$) que são linearmente independentes em todo ponto de M, então M é orientável.

24. (Qualificação 2016) Sejam M uma $(k+l+1)$-variedade compacta orientada em $\mathbb{R}^n$, com ∂M com a orientação induzida, se $\partial M \neq \emptyset$, e ω e η formas de classe C^1 de ordem k e l, respectivamente, definidas numa vizinhança de M, e com o suporte de uma delas contido no interior de M (isto é, $M \setminus \partial M$). Mostre que

$$\int_M d\omega \wedge \eta = -(-1)^k \int_M \omega \wedge d\eta.$$

25. (Qualificação 2015)

(a) Seja $\omega = y\,dx + (z\cos(yz) + x)\,dy + y\cos(yz)\,dz$. Mostre que ω é uma forma fechada. Ela é exata?

(b) Sejam ω_1 e ω_2 formas diferenciais de classe C^∞ em uma variedade diferenciável M de classe C^∞. Mostre que $\omega_1 \wedge \omega_2$ é exata se ω_1 é fechada e ω_2 é exata.

26. (Qualificação 2015) Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado tal que a fronteira $\partial\Omega$ é uma variedade conexa de classe C^∞. Suponha que $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1.

(a) Usando o teorema de Stokes (em sua forma mais geral), mostre que

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)\,dx = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \vec{n})\,dS,$$

onde $\vec{n}$ denota o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

(b) Mostre que se $\operatorname{div}(F) \equiv 0$ então F é tangente a $\partial\Omega$ em algum ponto.

(c) Seja $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Mostre que

$$\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dS,$$

onde $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ denota a derivada normal de u em $\partial\Omega$.

27. (Qualificação 2015)

(a) Seja M uma $(k+l+1)$-variedade compacta (de classe C^∞) em $\mathbb{R}^n$ orientada e com bordo. Sejam ω uma k-forma e η uma l-forma, ambas (de classe C^∞) definidas em um aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo M. Mostre a "fórmula de integração por partes"

$$\int_M \omega \wedge d\eta = (-1)^k \int_{\partial M} \omega \wedge \eta - (-1)^k \int_M d\omega \wedge \eta.$$

(b) Usando o item (a), mostre que se M é uma n-variedade compacta (de classe C^∞) em $\mathbb{R}^n$ orientada com bordo (não vazio) e conexa, e f é uma função de classe C^∞ em um aberto do $\mathbb{R}^n$ contendo M, tal que

$$\Delta f|_M = 0 \qquad \left(\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) \qquad \text{e} \qquad f|_{\partial M} = 0,$$

então $f|_M = 0$. [Dica: mostre que

$$\Delta f \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = d\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n\right),$$

onde $\widehat{dx_i}$ significa que dx_i é omitido, e tome $\omega = f$ e $d\eta = \Delta f \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.]

Provas

Prova 1 – 15/04/2025

Questão 1 (3 pontos).

(a) Marque verdadeiro (V) ou falso (F). Não precisa justificar.

(1) **(F)** A diferenciabilidade de uma função em $\mathbb{R}^n$ pode depender da norma escolhida.

(2) **(V)** Se $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em todos os pontos, mas é descontínua, então pelo menos uma das duas funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ é ilimitada.

(3) **(F)** Duas funções de classe C^∞ com mesmos polinômios de Taylor de ordem k num ponto p, para todo $k \geqslant 0$, são iguais numa vizinhança de p.

(4) **(V)** Se $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e $p \in \mathbb{R}^4$ é um ponto crítico de f tal que $\det Hf(p) < 0$, então p é um ponto de sela de f.

(5) **(F)** Se $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação bijetiva e diferenciável em $p \in \mathbb{R}^3$, é uma consequência da regra da cadeia que a inversa F^{-1} é diferenciável em $q = F(p)$ e satisfaz $JF^{-1}(q) = JF(p)^{-1}$.

(b) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z + y^2 + e^{x^2 - z}$.

(i) Justifique rapidamente que f é de classe C^∞ e calcule a fórmula de Taylor infinitesimal de ordem 3 de f na origem.

(ii) Calcule o gradiente $\nabla f(0)$ e a matriz hessiana $Hf(0)$ de f na origem. Determine se a origem é um extremo local de f.

Solução de (a). Breves justificativas (não exigidas na prova):

(1) Falso: todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, logo a condição $r(v) = o(\|v\|)$ não depende da norma.

(2) Verdadeiro: se $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant M$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M$, o teorema do valor médio em uma variável dá

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leqslant |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \\ &\leqslant M(|x - x_0| + |y - y_0|), \end{aligned}$$

e f seria contínua.

(3) Falso: $f(x) = e^{-1/x^2}$ (com $f(0) = 0$) e $g = 0$ têm todos os polinômios de Taylor nulos em $p = 0$, mas $f \neq g$ em qualquer vizinhança de 0.

(4) Verdadeiro: $\det Hf(p)$ é o produto dos quatro autovalores de $Hf(p)$; se for negativo, nenhum autovalor é nulo e o número de autovalores negativos é ímpar (logo 1 ou 3). Assim $Hf(p)$ é não degenerada e indefinida, e p é ponto de sela.

(5) Falso: $F(x, y, z) = (x^3, y, z)$ é bijetiva e diferenciável em $p = 0$, mas $F^{-1}(x, y, z) = (x^{1/3}, y, z)$ não é diferenciável em $q = 0$. (A regra da cadeia só dá a fórmula $JF^{-1}(q) = JF(p)^{-1}$ *supondo* F^{-1} diferenciável em q.) □

Solução de (b). (i) A função f é de classe C^∞ pois é soma e composição de funções polinomiais e exponenciais.

Usando que $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$ quando $t \to 0$, e que todo monômio em x, y, z de grau $\geqslant 4$ é $o(\|(x, y, z)\|^3)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= z + y^2 + \left(1 + (x^2 - z) + \frac{(x^2 - z)^2}{2} + \frac{(x^2 - z)^3}{6}\right. \\ &\qquad \left. + o((x^2 - z)^3)\right) \\ &= 1 + x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} - x^2 z - \frac{z^3}{6} + o(\|(x, y, z)\|^3). \end{aligned}$$

Note que os termos z e $-z$ se cancelam, e que $(x^2 - z)^2 = z^2 - 2x^2 z + x^4$ e $(x^2 - z)^3 = -z^3 +$ (termos de grau $\geqslant 4$). Pela unicidade da fórmula de Taylor infinitesimal, esta é a fórmula de Taylor de ordem 3 de f na origem.

(ii) Se $v = (x, y, z)$, o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em 0 é

$$f(0) + \langle \nabla f(0), v\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(0)v, v\rangle .$$

Comparando com o item (i), cujos termos de grau $\leqslant 2$ são $1 + x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2}$, obtemos

$$\nabla f(0) = (0, 0, 0) \qquad \text{e} \qquad Hf(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como 0 é ponto crítico ($\nabla f(0) = 0$) e $Hf(0)$ é definida positiva (autovalores positivos), a origem é um ponto de mínimo local de f. □

Questão 2 (2 pontos). Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função *homogênea de grau* 1, isto é, $f(tx) = tf(x)$ para todos $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que, se f é diferenciável em 0, então f é um funcional linear.

(b) Determine todos os $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais a função

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + \beta x y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0, \end{cases}$$

é diferenciável em 0.

Solução. (a) Note que $f(0) = 0$, pois $f(0) = f(2 \cdot 0) = 2f(0)$. Seja $\ell = df(0)$. Por definição de diferenciabilidade,

$$f(v) = \ell v + o(\|v\|), \qquad v \to 0.$$

Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Para $h > 0$, usando a homogeneidade e a linearidade de ℓ,

$$hf(p) = f(hp) = \ell(hp) + o(\|hp\|) = h\,\ell(p) + o(h), \qquad h \to 0^+.$$

Dividindo por h, obtemos $f(p) = \ell(p) + \frac{o(h)}{h}$, onde $\frac{o(h)}{h} \to 0$ quando $h \to 0^+$. Como $f(p)$ e $\ell(p)$ não dependem de h, fazendo $h \to 0^+$ concluímos que $f(p) = \ell(p)$. Isto é, $f = \ell$ é um funcional linear.

(b) A função f é homogênea de grau 1: $f(0) = 0$ e, se $(x,y) \neq 0$ e $t > 0$,

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^3 + \beta(tx)(ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = t f(x,y).$$

Pelo item (a) (e como todo funcional linear é diferenciável), f é diferenciável em 0 se, e somente se, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $f(x,y) = \lambda x + \mu y$, isto é,

$$x^3 + \beta x y^2 = (\lambda x + \mu y)(x^2 + y^2) = \lambda x^3 + \lambda x y^2 + \mu x^2 y + \mu y^3$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (a igualdade para $(x,y) \neq 0$ implica a igualdade em todo $\mathbb{R}^2$, por continuidade). Comparando coeficientes:

$$1 = \lambda = \beta, \qquad \mu = 0.$$

Logo, f é diferenciável em 0 se, e somente se, $\beta = 1$ (e nesse caso $f(x,y) = x$). □

Questão 3 (3 pontos). Seja $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$ e fixe $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seja

$$f\colon U \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

(a) Explique por que, para todo $t > 0$, a restrição de f à hipérbole $xy = t$ possui um ponto de mínimo global. Denote-o por (x_t, y_t).

(b) Utilizando multiplicadores de Lagrange, mostre que $x_t^p = y_t^q$.

(c) Mostre que $f(x_t, y_t) = t$ e conclua que $xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ para todos $x, y \geqslant 0$.

Solução. (a) A hipérbole

$$H_t = \{(x,y) \in U : xy = t\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ xy = t\}$$

é um subconjunto fechado e ilimitado de $\mathbb{R}^2$. A função f é contínua e $f(x,y) \to +\infty$ quando $\|(x,y)\| \to \infty$ em H_t (pois então $x \to \infty$ ou $y \to \infty$, e $p, q > 0$). Segue do lema visto em aula (sobre funções contínuas em fechados ilimitados que tendem a $+\infty$ no infinito) que $f|_{H_t}$ tem um mínimo global.

(b) Seja $g(x,y) = xy - t$, de modo que $H_t = \{g = 0\} \cap U$. Como $dg = y\,dx + x\,dy \neq 0$ em H_t (pois $x, y > 0$), H_t é uma curva de classe C^1 e podemos aplicar o teorema do multiplicador de Lagrange: o ponto (x_t, y_t) satisfaz, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} df = \lambda\, dg \\ g = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_t^{p-1}\,dx + y_t^{q-1}\,dy = \lambda\,(y_t\,dx + x_t\,dy) \\ x_t y_t - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_t^{p-1} = \lambda y_t \\ y_t^{q-1} = \lambda x_t \\ x_t y_t = t. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por x_t e a segunda por y_t, obtemos

$$x_t^p = \lambda x_t y_t = \lambda t, \qquad y_t^q = \lambda x_t y_t = \lambda t.$$

Logo, $x_t^p = y_t^q$.

(c) Usando o item (b) e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned} f(x_t, y_t) &= \frac{x_t^p}{p} + \frac{y_t^q}{q} = x_t^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = x_t^p \\ &= (x_t^p)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = x_t\,(x_t^p)^{\frac{1}{q}} = x_t\,(y_t^q)^{\frac{1}{q}} = x_t y_t = t. \end{aligned}$$

Dados $x, y > 0$, seja $t = xy$. Então $(x,y) \in H_t$ e, pela minimalidade de (x_t, y_t),

$$xy = t = f(x_t, y_t) \leqslant f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Se $x = 0$ ou $y = 0$, a desigualdade é imediata, pois $xy = 0 \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. □

Questão 4 (3 pontos). Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação.

(a) Relembre a definição de diferenciabilidade de F em um ponto $p \in U$ e a definição de norma de operador $\|L\|$ de uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(b) Suponha que F seja diferenciável em p. Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de p tal que

$$\|F(x) - F(p)\| \leqslant (\|DF(p)\| + \varepsilon)\|x - p\|$$

para todo $x \in V$.

(c) Admita a seguinte desigualdade do valor médio para aplicações:

> *Se F é diferenciável em todo ponto de um subconjunto convexo $K \subseteq U$ e $C \geqslant 0$ é uma constante tal que $\|DF(x)\| \leqslant C$ para todo $x \in K$, então*
>
> $$\|F(x) - F(y)\| \leqslant C\|x - y\|$$
>
> *para todos $x, y \in K$.*

Suponha que F seja de classe C^1 em U. Mostre que, dados $p \in U$ e $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de p tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant (\|DF(p)\| + \varepsilon)\|x - y\|$$

para todos $x, y \in V$.

Solução. (a) F é diferenciável em $p \in U$ se existe uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(p + v) = F(p) + Lv + o(\|v\|), \qquad v \to 0.$$

Tal L é única e denotada por $DF(p)$. A norma de operador de L é

$$\|L\| = \sup\left\{\frac{\|Lv\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = \sup\{\|Lv\| : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\}.$$

(b) Escreva $F(x) = F(p) + DF(p)(x-p) + r(x)$. Por definição, $\frac{r(x)}{\|x-p\|} \to 0$ quando $x \to p$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que $\|r(x)\| \leqslant \varepsilon\|x-p\|$ para todo $x \in V$ (para $x = p$ isso é trivial, pois $r(p) = 0$). Portanto, para todo $x \in V$,

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(p)\| &= \|DF(p)(x-p) + r(x)\| \leqslant \|DF(p)(x-p)\| + \|r(x)\| \\ &\leqslant \|DF(p)\|\|x-p\| + \varepsilon\|x-p\| = (\|DF(p)\| + \varepsilon)\|x-p\|.\end{aligned}$$

(c) Pela continuidade de DF em p, existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que $\|DF(x) - DF(p)\| < \varepsilon$ para todo $x \in V$. Em particular,

$$\|DF(x)\| \leqslant \|DF(p)\| + \|DF(x) - DF(p)\| < \|DF(p)\| + \varepsilon$$

para todo $x \in V$. Reduzindo V, se necessário, podemos supor que V é convexo (por exemplo, uma bola centrada em p). O resultado segue então imediatamente da desigualdade do valor médio, aplicada a $K = V$ e $C = \|DF(p)\| + \varepsilon$. □

Prova 2 – 03/07/2025

Questão 1 (3 pontos).

(a) Marque verdadeiro (V) ou falso (F). Não precisa justificar.

(1) **(F)** Uma aplicação suave $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuja derivada tem posto r em um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é, a menos de difeomorfismos, da forma $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ em uma vizinhança de p.

(2) **(F)** Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ é uma imersão suave em todo ponto de U, então a imagem $F(U)$ é uma variedade de dimensão n.

(3) **(V)** Se M é uma n-variedade com bordo, então o bordo ∂M é uma $(n-1)$-variedade sem bordo.

(4) **(V)** Não existe uma aplicação suave injetiva $F\colon \mathbb{R}^{2025} \to \mathbb{R}^{2024}$.

(5) **(V)** Se ω é uma 2-forma exata e η é uma 3-forma fechada, então $\omega \wedge \eta$ é uma 5-forma exata.

(b) Considere a aplicação $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (x^2 - y^2,\, 2xy).$$

(i) Calcule a matriz jacobiana de F em todo ponto de $\mathbb{R}^2$ e mostre que F induz um difeomorfismo local de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sobre si mesmo.

(ii) Calcule o pullback $F^* d\theta$, onde

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Solução de (a). Breves justificativas (não exigidas na prova):

(1) Falso: o teorema do posto exige posto *constante* igual a r em uma vizinhança de p. Por exemplo, $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$, tem derivada de posto 0 em $p = 0$, mas não é constante em nenhuma vizinhança de 0 (e o posto não é constante perto de 0).

(2) Falso: a imersão $F\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t)$, tem como imagem uma "figura oito", que não é uma variedade perto da origem.

(3) Verdadeiro (visto em aula): localmente, o bordo ∂M corresponde a $\partial \mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

(4) Verdadeiro: seja p um ponto onde o posto de $DF(p)$ é máximo, digamos $r \leqslant 2024 < 2025$. Como o posto é semicontínuo inferiormente, DF tem posto constante r numa vizinhança de p, e pelo teorema do posto F é localmente da forma $(x_1, \ldots, x_{2025}) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$, que não é injetiva.

(5) Verdadeiro: se $\omega = d\alpha$ e $d\eta = 0$, então $d(\alpha \wedge \eta) = d\alpha \wedge \eta - \alpha \wedge d\eta = \omega \wedge \eta$. □

Solução de (b)(i). Temos

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \qquad \det JF(x,y) = 4(x^2+y^2).$$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, então $\det JF(x,y) \neq 0$; logo, pelo teorema da função inversa, $F|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ é um difeomorfismo local.

Resta ver que $F(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Em coordenadas polares,

$$F(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (r^2\cos 2\theta,\ r^2 \operatorname{sen} 2\theta),$$

e isto é igual a $(s\cos\varphi, s\operatorname{sen}\varphi)$, com $s > 0$, se, e somente se, $r = \sqrt{s}$ e $\theta = \frac{1}{2}\varphi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Isto mostra que $F(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. □

Solução de (b)(ii). Cálculo direto:

$$\begin{aligned} F^*d\theta &= \frac{(x^2-y^2)\,d(2xy) - (2xy)\,d(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2} \\ &= \frac{(x^2-y^2)\,2(x\,dy + y\,dx) - 2xy\,(2x\,dx - 2y\,dy)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - 2xy^2 + 4xy^2)\,dy + (2x^2y - 2y^3 - 4x^2y)\,dx}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+y^2)\,dy - 2y(x^2+y^2)\,dx}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 2\,d\theta. \end{aligned}$$

Também é possível notar que a conta é trivial em coordenadas polares, pois F age da forma $(r,\theta) \mapsto (r^2, 2\theta)$. □

Questão 2 (3 pontos).

(a) Enuncie o teorema da função implícita.

(b) Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ wxy - xyz = 0 \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos de $w = w(y,z)$ e $x = x(y,z)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z,w) = (1,2,1,1)$.

(c) Calcule as derivadas parciais de w e de x com relação a y neste ponto.

Solução de (a). Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um aberto, com coordenadas $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, e $G\colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k ($k \geqslant 1$). Se $(p, q) \in U$ é tal que $G(p, q) = 0$ e

$$\det \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(p, q) \right)_{1 \leqslant i, j \leqslant m} \neq 0,$$

então existem uma vizinhança $V \times W \subseteq U$ de (p, q) e uma aplicação $F\colon V \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k tais que, se $(x, y) \in V \times W$, então

$$G(x, y) = 0 \iff y = F(x). \qquad \square$$

Solução de (b). Seja

$$G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z, w) \mapsto (w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6,\ wxy - xyz).$$

Note que $G(1, 2, 1, 1) = (0, 0)$. Basta verificar a hipótese do teorema da função implícita para as variáveis (x, w):

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial w} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 2w \\ y(w - z) & xy \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\det M(1, 2, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0. \qquad \square$$

Solução de (c). Supondo $x = x(y, z)$, $w = w(y, z)$ e derivando implicitamente com relação a y:

$$\begin{cases} 2w \frac{\partial w}{\partial y} + 4x \frac{\partial x}{\partial y} + 2y = 0, \\ xy \frac{\partial w}{\partial y} + wy \frac{\partial x}{\partial y} + wx - yz \frac{\partial x}{\partial y} - xz = 0. \end{cases}$$

Avaliando em $p = (1, 2, 1, 1)$:

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial w}{\partial y}(p) + 4 \frac{\partial x}{\partial y}(p) + 4 = 0, \\ 2 \frac{\partial w}{\partial y}(p) + 2 \frac{\partial x}{\partial y}(p) + 1 - 2 \frac{\partial x}{\partial y}(p) - 1 = 0, \end{cases}$$

ou seja, $\frac{\partial w}{\partial y}(p) = 0$ e $\frac{\partial x}{\partial y}(p) = -1$. $\square$

Questão 3 (3 pontos).

(a) Seja $R > 0$. Mostre que a esfera $S_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = R\}$ é uma variedade suave de dimensão $n-1$ e calcule os espaços tangentes T_pS_R em todo $p \in S_R$.

(b) Seja M uma variedade suave conexa e $f\colon M \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que, para todo $p \in M$, o funcional linear $df(p)\colon T_pM \to \mathbb{R}$ se anula. Mostre que f é constante.

(c) Seja $n \geqslant 2$ e $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Mostre que, se existe uma função $g\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x) = g(x)\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então f é constante em S_R para todo $R > 0$. [Você pode supor conhecido, sem demonstração, que S_R é conexa.]

Solução de (a). Temos $S_R = g_R^{-1}(0)$, onde

$$g_R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2 - R^2.$$

Como 0 é um valor regular de g_R (pois $dg_R(p) = 2(p_1\, dx_1 + \cdots + p_n\, dx_n) = 0$ se, e somente se, $p = 0$, e $0 \notin S_R$) e g_R é C^∞, segue de um teorema visto em aula que S_R é uma variedade C^∞ de dimensão $n-1$ e

$$T_pS_R = \operatorname{Ker} dg_R(p) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, p\rangle = 0\}. \qquad \square$$

Solução de (b). Seja $d = \dim M$. Se $\varphi\colon V \subseteq \mathbb{R}^d \to M$ é uma parametrização local de M com V convexo (o que sempre podemos supor, restringindo φ a uma bola), então, pela regra da cadeia,

$$d(f \circ \varphi)(x) = df(\varphi(x)) \circ D\varphi(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in V.$$

Logo, a função C^∞ $f \circ \varphi$ é constante em V (visto em aula) e, portanto, f é constante em $\varphi(V)$. Como podemos cobrir M por imagens de parametrizações locais, isto mostra que f é localmente constante. Como M é conexa, f é constante. $\square$

Solução de (c). Por hipótese,

$$df(x)\, v = \langle \nabla f(x), v\rangle = g(x)\, \langle v, x\rangle$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Se $p \in S_R$ e $v \in T_pS_R$, segue do item (a) que

$$d(f|_{S_R})(p)\, v = df(p)\, v = g(p)\, \langle v, p\rangle = 0.$$

Logo, $d(f|_{S_R}) = 0$ e, como S_R é conexa, segue do item (b) que $f|_{S_R}$ é constante. $\square$

Questão 4 (2 pontos). Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geqslant 0\}.$$

(a) Mostre que M é uma variedade suave com bordo compacta e determine ∂M.

(b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_M dy \wedge dz$, a menos de um sinal.

Solução de (a). O conjunto $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma variedade suave (sem bordo) de dimensão 2, pois 1 é um valor regular de $h(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$: de fato,

$$dh = 4x^3\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

e $(0, 0, 0) \notin N$.

Seja $g\colon N \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x$. Então 0 é um valor regular de g: se $p \in N$ e $g(p) = 0$, isto é, $p = (0, y, z)$ com $y^2 + z^2 = 1$, então $T_pN = \{v \in \mathbb{R}^3 : y\,v_2 + z\,v_3 = 0\}$ contém $e_1 = (1, 0, 0)$, logo $dg(p) = dx|_{T_pN}$ não se anula. Além disso, $M = g^{-1}([0, \infty))$. Por um teorema visto em aula, M é uma variedade suave com bordo de dimensão 2, com

$$\partial M = g^{-1}(0) = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1\}$$

(difeomorfo a S^1).

Note que $M \subseteq \mathbb{R}^3$ é fechado e limitado (pois $x^4 + y^2 + z^2 = 1$ implica $|x|, |y|, |z| \leqslant 1$); logo, M é compacto. □

Solução de (b). Note que $dy \wedge dz = d(y\,dz)$. Pelo teorema de Stokes,

$$\int_M dy \wedge dz = \int_M d(y\,dz) = \int_{\partial M} y\,dz.$$

Parametrizando ∂M menos um ponto por $\varphi(t) = (0, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in (0, 2\pi)$, temos (por um resultado visto em aula)

$$\int_{\partial M} y\,dz = \pm \int_0^{2\pi} \varphi^*(y\,dz) = \pm \int_0^{2\pi} \cos t\,d(\operatorname{sen} t) = \pm \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pm\pi.$$

Observação. Pode-se verificar que φ é positiva (para a orientação de M dada abaixo), e portanto $\int_{\partial M} y\,dz = +\pi$:

(i) Forma de orientação em M:

$$\omega = 4x^3\,dy \wedge dz - 2y\,dx \wedge dz + 2z\,dx \wedge dy,$$

isto é, $\omega(p)(u, v) = \det(\nabla h(p), u, v)$.

(ii) Se $p = (0, \cos t, \operatorname{sen} t) \in \partial M$, então $\vec{n}(p) = (-1, 0, 0) \in T_pM$ é o vetor unitário ortogonal a ∂M que aponta para fora (pois M é dada por $x \geqslant 0$).

(iii) Logo,

$$\omega(p)\big(\vec{n}(p), \varphi'(t)\big) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2\cos t & 0 & -\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t & 0 & \cos t \end{pmatrix} = 2 > 0. \qquad \square$$