

Beabá de categorias

Tiago J. Fonseca

tfonseca@unicamp.br

Abril de 2024

A teoria de categorias lida com diferentes estruturas matemáticas (*categorias*), as relações entre elas (*funtores*) e as relações entre as relações entre elas (*transformações naturais*).

1 Categorias

Definição 1.1. Uma categoria C consiste em

- Uma classe¹ $\text{Ob}(C)$ de *objetos*,
- para cada par de objetos X, Y , uma classe $\text{Hom}_C(X, Y)$ de *morfismos*,
- para cada objeto X , um *morfismo identidade* $\text{id}_X \in \text{Hom}_C(X, X)$,
- para cada terna de objetos X, Y, Z , uma operação binária de *composição de morfismos*

$$\text{Hom}_C(Y, Z) \times \text{Hom}_C(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_C(X, Z), \quad (g, f) \longmapsto g \circ f$$

tais que

- a composição de morfismos é *associativa*: se $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_C(Y, Z)$ e $h \in \text{Hom}_C(Z, W)$, então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

- se $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$, então

$$f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f.$$

¹A noção de *classe* é mais primitiva que a noção de *conjunto*. Podemos considerar a “classe de todos os conjuntos” ou a “classe de todos os grupos”. Veja <https://drive.google.com/file/d/1aQ5UL57nxb2Sm6r9ASVfKsr3Qk6NLauV/view>.

Dizemos que $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ é um *isomorfismo* se existe $f^{-1} \in \text{Hom}_C(Y, X)$ tal que

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

Se existe um isomorfismo entre dois objetos X e Y , dizemos que X e Y são *isomorfos*.

Representamos um morfismo $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ por uma *flecha*

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{ou} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Note porém que morfismos *não são necessariamente funções*.

Observação 1.2. As notações $\text{Hom}_C(X, Y) = \text{hom}_C(X, Y) = \text{Mor}_C(X, Y) = C(X, Y)$ também são usadas na literatura.

Exemplo 1.3. Nas categorias abaixo, morfismos são funções com alguma propriedade adicional. As noções de composição e de identidade são as usuais.

1. Na *categoria dos conjuntos*, Set , os objetos são conjuntos e os morfismos são funções.
2. Na *categoria dos grupos*, Grp , os objetos são grupos e os morfismos são homomorfismos de grupos.
3. Na *categoria dos espaços topológicos*, Top , os objetos são espaços topológicos e os morfismos são funções contínuas.

Note que usamos implicitamente que composição de homomorfismos de grupos (resp. funções contínuas) é ainda um homomorfismo de grupos (resp. função contínua) e que a identidade é um homomorfismo de grupos (resp. uma função contínua). Na categoria de conjuntos, um isomorfismo é o mesmo que uma bijeção. Na categoria de grupos, um isomorfismo é o mesmo que um isomorfismo de grupos. Na categoria de espaços topológicos, um isomorfismo é o mesmo que um homeomorfismo.

Exemplo 1.4. Seja (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado. Podemos formar uma categoria C tal que $\text{Ob}(C) = X$ e existe uma flecha $x \rightarrow y$ se e somente se $x \leq y$. Assim, as classes $\text{Hom}_C(x, y)$ são vazias ou unitárias.

Exercício 1.5. No exemplo acima, interprete de maneira categórica as propriedades de reflexividade, transitividade e anti-simetria de \leq .

Definição 1.6. Dizemos que uma categoria S é uma *subcategoria* de uma categoria C se $\text{Ob}(S)$ é uma subclasse de $\text{Ob}(C)$ e $\text{Hom}_S(X, Y)$ é uma subclasse de $\text{Hom}_C(X, Y)$ para todos objetos X, Y de S , de maneira que os morfismos identidade e as operações de composição em S e em C coincidam. Se $\text{Hom}_S(X, Y) = \text{Hom}_C(X, Y)$ para todos objetos X, Y de S , então dizemos que S é uma *subcategoria plena* de C .

Exemplo 1.7. A categoria Ab dos *grupos abelianos* é uma subcategoria plena de Grp .

Definição 1.8. Seja C uma categoria. A *categoria oposta* C^{op} tem como objetos os mesmos objetos de C , mas o sentido das flechas é invertido: $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_C(Y, X)$, para todos objetos X, Y .

Exercício 1.9. Mostre que C^{op} é de fato uma categoria e que $(C^{\text{op}})^{\text{op}} = C$.

Observação 1.10 (Para os fundamentalistas). Muitos matemáticos simplesmente ignoram as complicações decorrentes do uso de classes próprias na teoria de categorias. Dependendo do contexto, os mais cuidadosos podem se restringir ao uso de categorias pequenas (C é uma *categoria pequena* se as classes $\text{Ob}(C)$ e $\text{Hom}_C(X, Y)$ são conjuntos para todos $X, Y \in \text{Ob}(C)$) ou apenas localmente pequenas (C é uma *categoria localmente pequena* se as classes $\text{Hom}_C(X, Y)$ são conjuntos para todos $X, Y \in \text{Ob}(C)$). Note que as categorias Set , Top e Grp não são pequenas mas são localmente pequenas. Um recurso para “forçar” o uso de categorias pequenas em uma determinada teoria é o conceito de *universo de Grothendieck* (veja https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck_universe).

2 Diagramas e propriedades universais

É útil representar um conjunto de morfismos entre diferentes objetos através de um *diagrama* na categoria C , isto é, um grafo dirigido cujos vértices são objetos de C e cujas arestas são morfismos. Por exemplo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \swarrow g \\ & & Z \end{array}$$

Dizemos que um diagrama *comuta*, ou é *comutativo*, se as composições das flechas de quaisquer dois caminhos no diagrama com mesmos vértices inicial e final coincidem. No exemplo acima, o diagrama comuta se e somente se $g \circ f = h$.

Uma *propriedade universal* é uma propriedade que caracteriza de maneira única, possivelmente a menos de isomorfismo, o resultado de alguma construção numa determinada categoria.

Exemplo 2.1 (Grupo quociente). Seja G um grupo e N um subgrupo normal. O grupo quociente de G por N , é um grupo G/N munido de um morfismo de grupos $\pi : G \rightarrow G/N$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo grupo H e todo morfismo de grupos $f : G \rightarrow H$ tal que $N \subset \ker(f)$, existe um único morfismo de grupos $\bar{f} : G/N \rightarrow H$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ G/N & & \end{array}$$

Esta é a *propriedade universal do grupo quociente*. Se G' é um outro grupo munido de um morfismo $\pi' : G \rightarrow G'$ satisfazendo a mesma propriedade universal, então temos diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi'} & G' \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\pi}' & \\ G/N & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ \pi' \downarrow & \nearrow \bar{\pi} & \\ G' & & \end{array}$$

Os morfismos $\bar{\pi}$ e $\bar{\pi}'$ são inversos um do outro — em particular, G/N e G' são isomorfos. Para ver isto, note que a unicidade da propriedade universal para $(H = G/N$ e $f = \pi)$ aplicada ao diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi & & \\ & & \curvearrowright & & \\ G & \xrightarrow{\pi'} & G' & \xrightarrow{\bar{\pi}} & G/N \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{\pi}' & & \nearrow \bar{\pi} & \\ G/N & & & & \end{array}$$

garante que $\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' = \text{id}_{G/N}$; demonstramos similarmente que $\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} = \text{id}_{G'}$ invertendo os papéis de G/N e G' no argumento acima.

No exemplo anterior, a propriedade universal do grupo quociente pode ser usada para *definir* o grupo quociente sem precisar construí-lo. Isto não garante a existência de um grupo satisfazendo estas propriedades, apenas o caracteriza de maneira única a menos de isomorfismo (caso ele exista). Na filosofia da teoria de categorias, sempre que possível, buscamos definir o resultado de uma construção através de alguma propriedade universal. A existência de objetos e morfismos satisfazendo esta propriedade numa determinada categoria \mathcal{C} é um problema à parte, que pode ser resolvido com uma construção ad-hoc.

Exemplo 2.2 (Produto). Seja \mathcal{C} uma categoria e sejam X, Y objetos de \mathcal{C} . O *produto* de X por Y é um objeto $X \times Y$ munido de morfismos $p : X \times Y \rightarrow X$ e $q : X \times Y \rightarrow Y$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo objeto Z munido de morfismos $f : Z \rightarrow X$ e $g : Z \rightarrow Y$, existe um único morfismo $(f, g) : Z \rightarrow X \times Y$ que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Z & & f & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ & (f, g) & & & X \\ & \searrow & & \searrow p & \\ & g & & & Y \\ & \searrow & & & \\ & & q & & \\ & & \downarrow & & \end{array}$$

comutativo (isto é $p \circ (f, g) = f$ e $q \circ (f, g) = g$).

Observação 2.3. Os morfismos p e q , ditos de *projeção*, fazem parte da definição do produto. Em outras palavras, devemos pensar o produto não como um objeto $X \times Y$, mas como um diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

O mesmo comentário se aplica ao Exemplo 2.1: o morfismo $\pi : G \rightarrow G/N$ faz parte da definição do grupo quociente.

Exercício 2.4. Mostre que:

1. O produto, se existir, é único a menos de isomorfismo.
2. O produto cartesiano de dois espaços topológicos, munido da topologia produto, com as projeções naturais na primeira e segunda coordenada, é um produto na categoria Top.

Dê um exemplo de uma categoria C associada a um conjunto parcialmente ordenado (X, \leq) (Exemplo 1.4) e de objetos $x, y \in X$ tais que o produto $x \times y$ não existe

Exemplo 2.5 (Coproduto). Seja C uma categoria e sejam X, Y objetos de C . O *coproduto* de X e Y é um objeto $X \sqcup Y$ munido de morfismos $i : X \rightarrow X \sqcup Y$ e $j : Y \rightarrow X \sqcup Y$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo objeto Z munido de morfismos $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$, existe um único morfismo $f \sqcup g : X \sqcup Y \rightarrow Z$ que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow i & \searrow f \\ Y & \xrightarrow{j} & X \sqcup Y & \xrightarrow{f \sqcup g} & Z \\ & \searrow g & & & \downarrow \end{array}$$

comutativo (isto é $(f \sqcup g) \circ i = f$ e $(f \sqcup g) \circ j = g$).

Exercício 2.6. Mostre que:

1. O coproduto de dois conjuntos, na categoria Set, é isomorfo à união disjunta.
2. O coproduto de dois grupos, na categoria Grp, é isomorfo ao produto livre.
3. O coproduto de dois grupos abelianos, na categoria Ab, é isomorfo à soma direta.

Observação 2.7. Podemos ver Ab como subcategoria plena de Grp e Grp como subcategoria de Set . Note porém que o coproduto é diferente em cada uma dessas categorias.

Exercício 2.8. Seja C uma categoria. Um objeto X de C é dito *inicial* (resp. *terminal*) se satisfaz a propriedade universal seguinte: para todo objeto Y de C , existe um único morfismo $X \rightarrow Y$ (resp. $Y \rightarrow X$). Mostre que:

1. Objetos iniciais e terminais são únicos a menos de isomorfismo.
2. Na categoria Top , o espaço vazio \emptyset é um objeto inicial, e todo espaço topológico unitário é um objeto terminal.
3. Na categoria Ab , o grupo abeliano trivial 0 é um objeto inicial e terminal.

3 Funtores

Definição 3.1. Sejam C, D categorias. Um *funtor* de C a D , denotado por $F : C \rightarrow D$, é uma lei que associa

- a cada objeto X de C um objeto $F(X)$ de D ,
- a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em C um morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ em D ,

tal que

- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ para todo objeto X de C ,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todos morfismos $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ em C .

Um funtor $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$ é dito um *funtor contravariante* de C a D .

Observação 3.2. Um funtor contravariante reverte o sentido das flechas em C . Se $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ e $g \in \text{Hom}_C(Y, Z)$, então

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Lema 3.3. Se $F : C \rightarrow D$ é um funtor e $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ é um isomorfismo, então $F(f) \in \text{Hom}_D(F(X), F(Y))$ é um isomorfismo.

Demonstração. Seja $f^{-1} \in \text{Hom}_C(Y, X)$ o isomorfismo inverso de f . Aplicando F nas identidades

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

obtemos

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = \text{id}_{F(Y)}, \quad F(f^{-1}) \circ F(f) = \text{id}_{F(X)},$$

isto é, $F(f^{-1}) \in \text{Hom}_D(F(Y), F(X))$ é um inverso de $F(f)$. □

Exemplo 3.4. Se S é uma subcategoria de C , então a inclusão $i : S \rightarrow C$ é um funtor. Em geral, dada uma categoria C , subclasses $\text{Ob}(S) \subset \text{Ob}(C)$ e $\text{Hom}_S(X, Y) \subset \text{Hom}_C(X, Y)$ para todos $X, Y \in \text{Ob}(S)$ definem uma subcategoria S de C se e somente se S é uma categoria e a inclusão $i : S \rightarrow C$ é um funtor.

Exemplo 3.5. Dado um grupo G , a *abelianização* de G é o grupo abeliano $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$. Se $f : G \rightarrow H$ é um morfismo de grupos, então $f([G, G]) \subset [H, H]$, e portanto f induz um morfismo de grupos $f^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$. Assim, a abelianização é um funtor

$$\text{Grp} \rightarrow \text{Ab}, \quad \begin{cases} G \mapsto G^{\text{ab}} \\ f \mapsto f^{\text{ab}} \end{cases}$$

Exemplo 3.6. Seja $\mathbb{R}\text{-Alg}$ a categoria das \mathbb{R} -álgebras. A todo espaço topológico X , podemos associar uma \mathbb{R} -álgebra $C(X; \mathbb{R})$ de funções contínuas de X em \mathbb{R} . Dada uma função contínua $\varphi : X \rightarrow Y$, associamos um morfismo de \mathbb{R} -álgebras, dito *pullback*,

$$\varphi^* : C(Y; \mathbb{R}) \rightarrow C(X; \mathbb{R}), \quad f \mapsto f \circ \varphi.$$

Obtemos assim um funtor contravariante

$$\text{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{R}\text{-Alg}, \quad \begin{cases} X \mapsto C(X; \mathbb{R}) \\ \varphi \mapsto \varphi^* \end{cases}$$

Exercício 3.7. Mostre que existe um funtor $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$ que associa a cada espaço topológico X o conjunto das componentes conexas por caminhos de X .

Definição 3.8 (Propriedades básicas de funtores). Seja $F : C \rightarrow D$ um funtor e considere, para objetos X, Y de C , a aplicação

$$\text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_D(F(X), F(Y)), \quad f \mapsto F(f). \quad (1)$$

Dizemos que F é:

- *fiel* se, para todos $X, Y \in \text{Ob}(C)$, a aplicação (1) é injetiva;
- *pleno* se, para todos $X, Y \in \text{Ob}(C)$, a aplicação (1) é sobrejetiva;
- *plenamente fiel* se é fiel e pleno;
- *essencialmente sobrejetivo* se todo objeto de D é isomorfo a um objeto da forma $F(X)$, para $X \in \text{Ob}(C)$.

Exemplo 3.9. Se S é uma subcategoria de C , então o funtor de inclusão $i : S \rightarrow C$ é fiel. Note que S é uma subcategoria plena de C se e somente se i é pleno.

Exemplo 3.10. Seja k um corpo e $\text{Mat}(k)$ a categoria cujos objetos são números naturais (o que inclui o 0, obviamente) e os morfismos $m \rightarrow n$ são matrizes $m \times n$ com coeficientes em k , a composição sendo dada pelo produto de matrizes. Se Vect_k denota a categoria dos k -espaços vetoriais *de dimensão finita*, a existência de bases para espaços vetoriais mostra que o funtor

$$\text{Mat}(k) \rightarrow \text{Vect}_k,$$

que associa a cada m o k -espaço vetorial k^m e a cada morfismo $M : m \rightarrow n$ a transformação linear $k^m \rightarrow k^n$ correspondente à matriz M , é plenamente fiel e essencialmente sobrejetivo.

Exercício 3.11. Mostre que o funtor de abelianização $\text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ não é pleno, nem fiel, mas é essencialmente sobrejetivo.

Exercício 3.12. Quais das propriedades da Definição 3.8 valem para o funtor $\text{Top} \rightarrow \mathbb{R}\text{-Alg}$ do Exemplo 3.6?

4 Transformações naturais

Definição 4.1. Sejam $F, G : C \rightarrow D$ funtores. Uma *transformação natural*, ou um *morfismo de funtores*, $\eta : F \rightarrow G$ é uma família de morfismos

$$\eta_X \in \text{Hom}_D(F(X), G(X)), \quad X \in \text{Ob}(C),$$

tal que, para todo $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$, o diagrama em D

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

comuta. Se η_X é um isomorfismo para todo objeto X de C , dizemos que η é um *isomorfismo natural*, ou um *isomorfismo de funtores*.

Note que muitos autores denotam uma transformação natural com uma seta dupla $\eta : F \Rightarrow G$.

Exemplo 4.2. Para todo grupo G , temos um morfismo de projeção $\eta_G : G \rightarrow G^{\text{ab}}$. Isto define uma transformação natural do funtor identidade da categoria de grupos ao funtor abelianização (cf. Exemplo 3.5).

Exercício 4.3. Dado um funtor $F : C \rightarrow D$ e suponha que a classe $\text{Aut}_C(F)$ dos isomorfismos naturais de F em si mesmo seja um conjunto. Mostre que $\text{Aut}_C(F)$ possui uma estrutura natural de grupo.

4.1 Funtores representáveis e lema de Yoneda

Seja C uma categoria localmente pequena. Todo objeto X de C define funtores (verifique!)

$$\mathrm{Hom}_C(X, _): C \rightarrow \mathrm{Set}, \quad \mathrm{Hom}_C(_, X): C^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Set}.$$

Definição 4.4. Dizemos que um funtor $F: C \rightarrow \mathrm{Set}$ (resp. um funtor contravariante $F: C^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Set}$) é *representável* se existe um objeto X de C e um isomorfismo natural entre F e $\mathrm{Hom}_C(X, _)$ (resp. $\mathrm{Hom}_C(_, X)$).

Exercício 4.5. Na definição acima, dizemos que X é um *representante* de F . Mostre que X é único a menos de isomorfismo.

Exemplo 4.6. O funtor esquecimento $F: \mathrm{Top} \rightarrow \mathrm{Set}$ que associa a um espaço topológico o seu conjunto subjacente é representável por um espaço topológico unitário $*$. De fato, dado um espaço topológico X , um ponto $x \in X$ corresponde a uma única função contínua $* \rightarrow X$ com imagem $\{x\}$. Isto define uma bijeção $X \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(*, X)$. Obtemos assim um isomorfismo natural entre F e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(*, _)$.

Exercício 4.7. Mostre que o funtor $\mathcal{P}: \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Set}$ que associa a um conjunto X o conjunto de subconjuntos $\mathcal{P}(X) = \{S: S \subset X\}$, e a uma função $f: X \rightarrow Y$, a função $\mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $S \mapsto f^{-1}(S)$, é representável. Por outro lado, mostre que um funtor análogo $\mathrm{Grp}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Set}$ que associa a um grupo o conjunto de seus subgrupos *não* é representável.

Exercício 4.8. Seja R um anel comutativo com unidade. Considere o funtor $\mathbb{G}_m: R\text{-Alg} \rightarrow \mathrm{Grp}$ que associa, a toda R -álgebra A , o grupo de unidades $A^\times = \{a \in A: ab = 1 \text{ para algum } b \in A\}$. Mostre que \mathbb{G}_m é representável pela R -álgebra dos polinômios de Laurent $R[x, x^{-1}]$.

Seja C uma categoria localmente pequena e considere a *categoria de funtores* $\mathrm{Hom}(C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$, cujos objetos são funtores $C^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Set}$ e os morfismos são transformações naturais. Um objeto de $\mathrm{Hom}(C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$ também é dito um *pré-feixe* em C e vamos denotar $\mathrm{Hom}(C^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}) = \mathrm{PSh}(C)$. Para simplificar, denotemos $\mathrm{Hom}_C(_, X) = \underline{X}$. Temos um funtor natural

$$C \rightarrow \mathrm{PSh}(C) \tag{2}$$

que associa a cada objeto X de C o funtor representável \underline{X} , e a cada morfismo $f: X \rightarrow Y$, a transformação natural $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ induzida pela composição com f .

Lema 4.9 (Yoneda). *Para todo objeto X de C e todo pré-feixe F em C , a aplicação $\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSh}(C)}(\underline{X}, F) \rightarrow F(X)$, que associa a uma transformação natural $\eta: \underline{X} \rightarrow F$ o elemento $\eta_X(\mathrm{id}_X)$, é uma bijeção. Em particular, o funtor (2) é plenamente fiel.*

O funtor (2) é também chamado de *mergulho de Yoneda* e permite enxergar a categoria C como uma subcategoria da categoria de pré-feixes $\text{PSh}(C)$. Informalmente, o lema de Yoneda diz que um objeto de uma categoria é completamente determinado pela maneira com a qual ele interage com outros objetos da mesma categoria (“diga-me com quem tu andas que eu te direi quem és”).

Demonstração. Dado um elemento $\varphi \in F(X)$, defina uma transformação natural $\hat{\varphi} : \underline{X} \rightarrow F$ tal que, para todo objeto Y de C ,

$$\hat{\varphi}_Y : \underline{X}(Y) = \text{Hom}_C(Y, X) \rightarrow F(Y)$$

é a aplicação que associa a cada morfismo $f : Y \rightarrow X$ o elemento $F(f)(\varphi)$ de $F(Y)$. Verifica-se que $\hat{\varphi}$ é de fato uma transformação natural e que a aplicação $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ é uma inversa da aplicação do enunciado (exercício!). Para a última afirmação, basta aplicar o resultado anterior aos funtores representáveis $F = \underline{Y}$. \square

Observação 4.10. Existe uma outra versão do lema de Yoneda com os funtores $\text{Hom}_C(X, _)$ no lugar de $\text{Hom}_C(_, X)$, que segue imediatamente do resultado acima aplicado à categoria oposta C^{op} .

5 Onde procurar mais informações?

5.1 Referências online

- *Wikipedia*, <https://en.wikipedia.org/>. Sem sacanagem, um ótimo lugar para pesquisar as definições e conceitos básicos da teoria de categorias.
- *nLab*, <https://ncatlab.org/>. Tudo o que você precisa, escrito do jeito mais complicado possível.
- *The Stacks Project*, <https://stacks.math.columbia.edu/tag/0011>. Tem a teoria básica e inclui tópicos mais avançados orientados à geometria algébrica.

5.2 Livros

- S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*. O clássico.
- E. Riehl, *Category Theory in Context*, <https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf>. Referência introdutória moderna.
- M. F. Silva Ribeiro, *Teoria das Categorias para Matemáticos: uma breve introdução*. Referência introdutória moderna em português.