A fórmula integral de Cauchy
e o teorema fundamental da álgebra

Tiago J. Fonseca

Abril de 2026

1 Funções holomorfas

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^1. Denotando um número complexo $z \in U$ por $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, podemos interpretar f como uma função em duas variáveis reais x, y a valores complexos.

A diferencial, ou derivada exterior, de f é dada pela fórmula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

O objeto acima é uma 1-forma diferencial (de classe C^0) em U a valores complexos, que podemos reescrever da seguinte maneira:

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx + idy) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx - idy).$$

Repare que $dx + idy = dz$ (a diferencial da identidade $z \mapsto z$) e $dx - idy = d\overline{z}$ (a diferencial da conjugação complexa $z \mapsto \overline{z}$). Assim, se definirmos os operadores diferenciais, ditos *operadores de Cauchy–Riemann*, ou *derivadas de Wirtinger*,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

obtemos a seguinte expressão alternativa para a diferencial de f:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Definição 1.1. Dizemos que f é *holomorfa* se $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ identicamente em U. Neste caso, denotamos $\partial f/\partial z = f'$ e denominamos esta função de *derivada complexa* de f.[1]

[1] Aqui, estamos supondo de início que f seja de classe C^1. Na maioria das referências, a holomorficidade é definida somente em termos da existência dos limites $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Esta definição implica, de maneira não-trivial, que f é necessariamente de classe C^1, e pode-se mostrar então que ambas as definições são equivalentes.

Observação 1.2. Considerando as partes real e imaginária de f na equação $\partial f/\partial\overline{z} = 0$, obtemos as chamadas *equações de Cauchy–Riemann.*

Segue das regras usuais de derivação (linearidade, regra do produto) para derivadas parciais que o conjunto de funções holomorfas em U forma uma $\mathbb{C}$-álgebra e que a derivada complexa é $\mathbb{C}$-linear e satisfaz $(fg)' = f'g + fg'$. Além disso, se $a \in U$ é tal que $f(a) \neq 0$, a função $1/f$ é holomorfa em uma vizinhança de a e vale $(1/f)' = -f'/f^2$.

Exemplo 1.3 (Funções polinomiais)**.** Um cálculo direto mostra que a função identidade $z \mapsto z$ é holomorfa:

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy) = \frac{1}{2}(1+i^2) = 0.$$

Verifica-se diretamente, também, que $\partial z/\partial z = 1$. Então, pelas observações acima, todo polinômio com coeficientes complexos $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ define uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ cuja derivada complexa é dada pela regra usual: $f'(z) = na_n z^{n-1} + \cdots + a_1$.

Na seção seguinte, utilizaremos a seguinte reformulação de holomorficidade em termos de formas diferenciais.

Lema 1.4. *Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se, a 1-forma $f dz$ é fechada.*

Demonstração. O enunciado segue imediatamente da equação abaixo, válida para qualquer função $f : U \to \mathbb{C}$ de classe C^1:

$$d(f dz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \wedge dz = 2i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dx \wedge dy. \qquad \square$$

2 Fórmula integral de Cauchy

Teorema 2.1 (Cauchy)**.** *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $\overline{D}$ um disco fechado contido em U e $a \in D$ um ponto no seu interior. Então:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

A integral acima é tomada no sentido da integração de formas diferenciais em subvariedades. O círculo ∂D é considerado com a sua orientação positiva usual.

Demonstração. Dado um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, seja $A_\varepsilon = \overline{D} \setminus D_\varepsilon(a)$ o subconjunto fechado de $\overline{D}$ dos pontos a distância pelo menos ε de a. Como a função $z \mapsto f(z)/(z-a)$ é holomorfa em uma vizinhança aberta de A_ε, segue do Lema 1.4 e do Teorema de Stokes que

$$0 = \int_{A_\varepsilon} d\left(\frac{f(z)}{z-a}dz\right) = \int_{\partial A_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{\partial D_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}dz. \quad (1)$$

Considerando a parametrização $\gamma : [0, 2\pi] \to \partial D_\varepsilon(a)$ dada por $\gamma(t) = a + \varepsilon e^{it}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \int_0^{2\pi} \gamma^* \left(\frac{f(z)}{z-a} dz \right) = \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-a} \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{it}) dt.\end{aligned}$$

Daí, segue de (1) (que vale para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno) e da continuidade de f em a que

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz \\ &= i \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} f(a) dt = 2\pi i f(a).\end{aligned}$$

□

O resultado acima é surpreendente pois afirma que os valores de uma função holomorfa no interior de um disco são completamente determinados pelos seus valores no bordo deste disco. É uma manifestação da "rigidez" das funções holomorfas.

Observação 2.2. Uma consequência mais ou menos imediata da fórmula integral de Cauchy, que não faremos aqui, é que funções holomorfas são analíticas, isto é, localmente dadas por séries de potências; em particular, são infinitamente diferenciáveis.

A seguir, precisaremos apenas do corolário seguinte, que também é bastante surpreendente, pois diz que uma derivada é uma integral!

Corolário 2.3 (Cauchy)**.** *Nas condições do teorema anterior, a derivada complexa de f em a é dada por:*

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Demonstração. Considerando a como uma variável complexa na fórmula integral de Cauchy, basta aplicar o operador $\partial/\partial a$ e utilizar o resultado clássico de "derivação sob sinal da integral" para funções de classe C^1 (também conhecido como Regra de Leibniz). □

3 Aplicações

Uma função holomorfa em todo o plano complexo é dita *função inteira*. Pelo Exemplo 1.3, funções polinomiais são inteiras.

Teorema 3.1 (Liouville)**.** *Toda função inteira e limitada é constante.*

Demonstração. Como f é inteira, se $a \in \mathbb{C}$ e $R > 0$, segue do Corolário 2.3 e da "desigualdade triangular para integrais" que

$$\begin{aligned} |f'(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R(a)} \left| \frac{f(z)}{(z-a)^2} \right| |dz| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sup_{z \in D_R(a)} |f(z)|}{R^2} \right) 2\pi R \leq \frac{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}{R}. \end{aligned}$$

Note que $\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ é finito pois f é limitada. Fazendo $R \to \infty$, obtemos $f'(a) = 0$. Como isto vale para um $a \in \mathbb{C}$ arbitrário, temos que $df = f'dz = 0$ identicamente em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é conexo, concluímos que f é constante. □

Corolário 3.2 (Teorema fundamental da álgebra)**.** *O corpo dos números complexos é algebricamente fechado.*

Demonstração. Seja $n \geq 1$ um inteiro e $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ uma função polinomial com coeficientes $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \ldots, n$, e suponha que $a_n \neq 0$. Por contradição, se f não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{C}$, então a função $1/f$ é inteira. Mas,

$$\frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{|a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0|} = \frac{1}{|z|^n} \frac{1}{|a_n + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}|}$$

tende a 0 quando $|z| \to \infty$. Como f é contínua, isto implica que f é limitada. Pelo teorema de Liouville, $1/f$ é constante. Logo, f é constante, o que contradiz as hipóteses $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. □