

Diferenciais em anéis comutativos

Tiago J. Fonseca

Outubro de 2026

Este trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil, processo nº 2020/15804-1.

Resumo

As presentes notas correspondem a uma versão estendida do conteúdo de um minicurso oferecido como parte do **programa de verão 2023** do ICMC-USP, São Carlos. O objetivo foi apresentar, da forma mais autocontida possível, a teoria básica dos diferenciais de Kähler, bem como dar uma breve introdução à cohomologia de de Rham algébrica. Ferramenta básica da álgebra comutativa, os diferenciais de Kähler também aparecem de maneira essencial em diversos desenvolvimentos da geometria algébrica¹ e, portanto, devem interessar a qualquer aluno de pós-graduação que busca se especializar em áreas correlatas. De fato, este curso pode ser interpretado como uma introdução aos métodos diferenciais em geometria algébrica.

Aviso sobre IA: esta versão digital foi preparada com o auxílio de um modelo de linguagem de inteligência artificial, a partir das notas manuscritas originais (humanas).

¹Temos em mente, por exemplo, a noção de divisor canônico, o teorema de Riemann–Roch, a dualidade de Serre, etc.

Plano das aulas

1. Derivações; módulo de diferenciais de Kähler e sua propriedade universal; primeira e segunda sequências exatas fundamentais; localização e mudança de base; hipersuperfícies, extensões de corpos, cúspide e curva elíptica afim.
2. Suavidade via levantamentos infinitesimais; números duais e vetores tangentes; módulos projetivos; $\Omega_{A/R}$ é projetivo para A suave; dimensão relativa; álgebras étale; sequências exatas cindidas; regularidade; critério do jacobiano; um módulo projetivo que não é livre.
3. Potências exteriores; formas diferenciais e derivada exterior; complexo e cohomologia de de Rham; exemplos; homologia singular e o teorema de comparação de Grothendieck; perspectivas.

Apêndice: o dicionário entre $\mathbb{C}$ -álgebras de tipo finito e conjuntos algébricos; Nullstellensatz; morfismos; exemplos.

Aula 1

Pré-requisitos

O leitor deverá estar familiarizado com as noções mais elementares da teoria de anéis (ideais, quocientes, módulos), bem como com os conceitos de sequência exata e diagrama comutativo. Em alguns pontos, utilizaremos também as noções de localização e produto tensorial. Como referências complementares sobre o módulo de diferenciais, sugerimos [1, §25], [3, Cap. 16] e [4, Seção II.8].

Notação

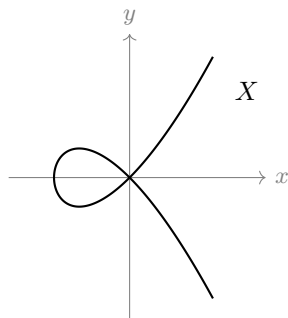
Todos os anéis serão comutativos e com unidade. Se R é um anel, lembremos que uma R -álgebra é simplesmente um anel A munido de um morfismo de anéis $R \rightarrow A$. Em particular, uma R -álgebra é um R -módulo. Um morfismo de R -álgebras é um morfismo de anéis R -linear.

A fim de enfatizar o ponto de vista geométrico implícito nestas notas, elementos de um anel A serão frequentemente denotados por f (em vez do mais habitual a), porque devemos pensar A como um *anel de funções* num certo espaço. Elementos de R serão denotados por c , pois fazem o papel de funções constantes. Em geral, morfismos de anéis podem ser pensados como *pullback* de funções.

Por exemplo, se $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x, y]/(P)$, com $P = y^2 - x^2(x+1)$, pensamos em A como o anel de funções na curva

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\}.$$

De fato, cada $f = F + (P) \in A$ define uma função $X \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto F(z, w)$, que não depende da escolha do representante F . Este dicionário entre $\mathbb{C}$ -álgebras de tipo finito e subconjuntos de $\mathbb{C}^m$ definidos por equações polinomiais é resumido no [Apêndice](#). Eis o desenho dos pontos reais de X :



Derivações

No cálculo diferencial real, a derivada de uma função diferenciável f é uma função real f' definida pelo limite

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

A derivada satisfaz as duas propriedades *algébricas* seguintes:

1. $\mathbb{R}$ -linearidade: $(f + cg)' = f' + cg'$,
2. Regra do produto (ou regra de Leibniz): $(fg)' = f'g + fg'$.

Em álgebra, tomamos as propriedades acima como ponto de partida para uma noção abstrata de derivação.

Definição 1.1. Seja R um anel, A uma R -álgebra e M um A -módulo. Uma aplicação $D : A \rightarrow M$ é dita uma R -*derivação* se

1. D é R -linear,
2. D satisfaz a regra de Leibniz: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ para todos $f, g \in A$.

O conjunto das R -derivações de A em M é denotado por $\text{Der}_R(A, M)$. Note que $\text{Der}_R(A, M)$ herda do conjunto de aplicações R -lineares $\text{Hom}_R(A, M)$ uma estrutura natural de A -módulo: a aplicação nula é uma derivação e, se D_1, D_2 são derivações e $f \in A$, então $D_1 + fD_2$ é uma derivação. Quando $M = A$, denotamos $\text{Der}_R(A, A) = \text{Der}_R(A)$.

Exercício 1.2. A derivada do cálculo pode ser vista como uma derivação no sentido da Definição 1.1? Se sim, explicita R , A e M . Dica: considere o anel $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções suaves.

Lema 1.3. *Sejam R um anel, A uma R -álgebra e M um A -módulo. Seja $D \in \text{Der}_R(A, M)$.*

1. Para todo $c \in R$, $D(c) = 0$.
2. Para todo $n \geq 1$ e todos $f_1, \dots, f_n \in A$,

$$D(f_1 \cdots f_n) = \sum_{i=1}^n f_1 \cdots D(f_i) \cdots f_n.$$

3. Para todo $n \geq 1$ e todo $f \in A$, $D(f^n) = n f^{n-1} D(f)$. Se $f \in A^\times$, então a mesma fórmula vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Como D é R -linear, $D(c) = cD(1)$ para todo $c \in R$. Pela regra de Leibniz,

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1),$$

logo $D(1) = 0$. Isto prova a afirmação 1.

Para a afirmação 2, procedemos por indução em n . O caso base $n = 1$ é trivial. Para $f_1, \dots, f_n \in A$, temos pela regra de Leibniz

$$D(f_1 \cdots f_{n-1} f_n) = D(f_1 \cdots f_{n-1}) f_n + f_1 \cdots f_{n-1} D(f_n)$$

e concluímos usando a hipótese de indução no primeiro termo.

A fórmula $D(f^n) = n f^{n-1} D(f)$ para $n \geq 1$ é o caso particular da afirmação 2 em que todos os f_i são iguais. Se $n = 0$, este é o conteúdo da afirmação 1. Finalmente, se $f \in A^\times$ e $n < 0$, basta aplicar o que acabamos de demonstrar a f^{-1} e $-n$. Isto termina a demonstração de 3. $\square$

Exercício 1.4. Dada $D \in \text{Der}_R(A, M)$, podemos associar a *derivação logarítmica*

$$D \log : A^\times \longrightarrow M, \quad f \longmapsto \frac{D(f)}{f}.$$

Mostre que a derivação logarítmica transforma produtos em somas: $D \log(fg) = D \log(f) + D \log(g)$. Calcule $D \log(f^n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.5. Se $A = R[x]$, então

$$\frac{d}{dx} : R[x] \longrightarrow R[x], \quad \sum_{n=0}^k c_n x^n \longmapsto \sum_{n=1}^k n c_n x^{n-1}$$

é uma R -derivação de A . De fato, como A é um R -módulo livre gerado pelas potências de x , segue das propriedades do Lema 1.3 que $\frac{d}{dx}$ é a única R -derivação de A que satisfaz $\frac{dx}{dx} = 1$. Em geral, qualquer R -derivação de A é completamente determinada pelo seu valor em x . Daí, segue que

$$\text{Der}_R(A) = A \frac{d}{dx}$$

como A -módulo. Isto é, toda R -derivação D de A se escreve de maneira única como

$$D = f \frac{d}{dx}, \quad f \in A.$$

Exemplo 1.6. Mais geralmente, suponha que $A = R[x_1, \dots, x_m]$. Então, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ existe uma única R -derivação $\frac{\partial}{\partial x_i}$ que satisfaz

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}, \quad j \in \{1, \dots, m\},$$

e temos uma identidade de A -módulos

$$\text{Der}_R(A) = A \frac{\partial}{\partial x_1} \oplus \cdots \oplus A \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Isto é, toda R -derivação D de A se escreve de maneira única como

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_m \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad f_i \in A.$$

Observação 1.7. Se M é uma variedade suave, digamos de classe C^∞ , então um campo vetorial em M é o mesmo que uma $\mathbb{R}$ -derivação do anel de funções $C^\infty(M, \mathbb{R})$. O exemplo acima é uma versão puramente algébrica do fato que todo campo vetorial em $\mathbb{R}^m$ é da forma $\sum_{i=1}^m f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ para únicas $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.

Exercício 1.8 (Colchete de Lie). Se $D_1, D_2 \in \text{Der}_R(A)$, mostre que $D_1 \circ D_2$ não é em geral uma R -derivação de A . Porém, mostre que

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \text{Der}_R(A).$$

Em $A = R[x_1, x_2]$, calcule $[x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}]$. Dica: expanda $D_1(D_2(fg))$ pela regra de Leibniz; os termos cruzados $D_1(f)D_2(g) + D_2(f)D_1(g)$ se cancelam no comutador.

Exercício 1.9. É verdade que, se $f \in A$ é tal que $D(f) = 0$ para todo $D \in \text{Der}_R(A)$, então $f \in R$? Dica: considere $A = R[x]$, onde R é um anel de característica $p > 0$.

Exercício 1.10. Mostre que, se $D \in \text{Der}_R(A)$ e $n \geq 1$, então

$$D^n(fg) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D^i(f) D^{n-i}(g),$$

onde D^j denota a composição da derivação D consigo mesma j vezes. Conclua que, se R é um anel de característica $p > 0$, então $D^p \in \text{Der}_R(A)$ (use que p divide $\binom{p}{i}$ para $0 < i < p$). Em $A = R[x]$, com R de característica $p > 0$, calcule $(\frac{\partial}{\partial x})^p$ e $(x \frac{\partial}{\partial x})^p$. Em $A = R[x_1, x_2]$, com R de característica 2, calcule $(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2})^2$.

Exercício 1.11 (Identidade de Euler). Em $A = R[x_1, \dots, x_m]$, seja

$$D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Suponha que R seja uma $\mathbb{Q}$ -álgebra e seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $D(f) = nf$ se e somente se f é um polinômio homogêneo de grau n . Dica: verifique que $D(x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}) = (a_1 + \dots + a_m) x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$ e decomponha f em componentes homogêneas.

Exemplo 1.12 (Aplicação: identidade de Newton). Seja $A = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$. Lembremos que os *polinômios simétricos elementares* $s_i \in A$ são definidos pela equação

$$t^m - s_1 t^{m-1} + \dots + (-1)^m s_m = (t - x_1) \dots (t - x_m) \quad (1)$$

em $A[t]$ e que o teorema fundamental dos polinômios simétricos diz que, dado um anel comutativo R , qualquer polinômio simétrico em $R[x_1, \dots, x_m]$ (isto é, invariante com respeito a permutações arbitrárias das variáveis) pode ser escrito como um polinômio em $s_1, \dots, s_m$ com coeficientes em R . Por exemplo,

$x_1^2 + \cdots + x_m^2 = s_1^2 - 2s_2$. Em geral, não é fácil descrever uma fórmula explícita que exprime a soma de potências

$$p_k = x_1^k + \cdots + x_m^k$$

como polinômio em $s_1, \dots, s_m$, mas a *identidade de Newton*

$$ks_k = s_{k-1}p_1 - s_{k-2}p_2 + \cdots + (-1)^{k-2}s_1p_{k-1} + (-1)^{k-1}s_0p_k$$

fornece uma solução recursiva a este problema (note que $s_0 = 1$ e $s_i = 0$ para $i > m$). Para demonstrar a identidade acima, trabalhamos no anel de séries formais $B = \mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_m]]$ e consideramos a derivação D do Exercício 1.11, definida em B de maneira análoga. Avaliando (1) em $t = -1$ e multiplicando a equação por $(-1)^m$, obtemos

$$s_0 + s_1 + \cdots + s_m = (1 + x_1) \cdots (1 + x_m).$$

Note que cada $1 + x_i$ é invertível em B e seu inverso é dado explicitamente por $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x_i^n \in B$. Aplicando $D \log$ na equação acima, segue da identidade de Euler que:

$$\frac{s_1 + 2s_2 + \cdots + ms_m}{s_0 + s_1 + \cdots + s_m} = \frac{x_1}{1 + x_1} + \cdots + \frac{x_m}{1 + x_m} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n p_{n+1}.$$

Agora basta multiplicar a equação por $s_0 + s_1 + \cdots + s_m$ e comparar os termos homogêneos de grau k .

Módulo de diferenciais, I

Vamos construir agora uma noção dual à noção de derivação.

Teorema 1.13. *Seja A uma R -álgebra. Existe um A -módulo $\Omega_{A/R}$ munido de uma R -derivação $d_{A/R} : A \rightarrow \Omega_{A/R}$ tal que, para todo A -módulo M , a aplicação*

$$\text{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \longrightarrow \text{Der}_R(A, M), \quad \rho \longmapsto \rho \circ d_{A/R}$$

é bijetiva. O par $(\Omega_{A/R}, d_{A/R})$ é único, a menos de único isomorfismo.

No enunciado acima, $\text{Hom}_A(-, -)$ significa “morfismos de A -módulos”, isto é, aplicações A -lineares. Em linguagem categórica, estamos dizendo que o endofuntor $M \mapsto \text{Der}_R(A, M)$ na categoria de A -módulos é representável por $\Omega_{A/R}$ e que $d_{A/R} \in \text{Der}_R(A, \Omega_{A/R})$ é o elemento universal. De maneira equivalente, dada $D \in \text{Der}_R(A, M)$, existe um único $\rho \in \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$ fazendo o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{A/R} & \xrightarrow{\rho} & M \\ d_{A/R} \uparrow & \nearrow D & \\ A & & \end{array}$$

Demonstração do teorema. Seja F o A -módulo livre gerado pelos símbolos x_f para todo $f \in A$, ou seja,

$$F = \bigoplus_{f \in A} Ax_f.$$

Seja G o submódulo de F gerado por todos os elementos da forma $x_{f+cg} - x_f - cx_g$ e $x_{fg} - x_fg - fx_g$, onde $f, g \in A$ e $c \in R$, e defina

$$\Omega_{A/R} = F/G.$$

A classe de x_f no quociente é denotada por $x_f + G = d_{A/R}(f)$. Assim, obtemos uma aplicação $d_{A/R} : A \rightarrow \Omega_{A/R}$ que é uma R -derivação, pois

$$d_{A/R}(f + cg) = x_{f+cg} + G = x_f + cx_g + G = d_{A/R}(f) + cd_{A/R}(g),$$

$$d_{A/R}(fg) = x_{fg} + G = x_fg + fx_g + G = d_{A/R}(f)g + fd_{A/R}(g).$$

Se M é um A -módulo qualquer e $D \in \text{Der}_R(A, M)$, então existe uma única aplicação A -linear $\tilde{\rho} : F \rightarrow M$ satisfazendo $\tilde{\rho}(x_f) = D(f)$ para todo $f \in A$. Como D é uma R -derivação, o submódulo G está contido no núcleo de $\tilde{\rho}$. Logo, existe uma única aplicação A -linear $\rho : \Omega_{A/R} \rightarrow M$ tal que $\rho(x_f + G) = \tilde{\rho}(x_f) = D(f)$. Ou seja, $D = \rho \circ d_{A/R}$.

Seja $(\Omega'_{A/R}, d'_{A/R})$ um outro par satisfazendo as propriedades do enunciado. Por um lado, existe uma única aplicação A -linear $\rho : \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega'_{A/R}$ tal que $d'_{A/R} = \rho \circ d_{A/R}$. Por outro lado, existe uma única aplicação A -linear $\rho' : \Omega'_{A/R} \rightarrow \Omega_{A/R}$ tal que $d_{A/R} = \rho' \circ d'_{A/R}$. Pela unicidade, temos que $\rho' \circ \rho = \text{id}_{\Omega_{A/R}}$ e $\rho \circ \rho' = \text{id}_{\Omega'_{A/R}}$. Assim, ρ é o único isomorfismo entre os A -módulos $\Omega_{A/R}$ e $\Omega'_{A/R}$ que identifica $d_{A/R}$ com $d'_{A/R}$. $\square$

Definição 1.14. O A -módulo $\Omega_{A/R}$ é o *módulo dos diferenciais de Kähler de A sobre R* ou *módulo das 1-formas diferenciais de A sobre R* . A derivação $d_{A/R} : A \rightarrow \Omega_{A/R}$ é chamada de *derivada exterior de A sobre R* .

Observação 1.15. Há ainda quem diga que os elementos de $\Omega_{A/R}$ são *diferenciais relativos*, pois dependem da estrutura de A como R -álgebra, ou seja, são diferenciais em A relativamente a R .

Quando não houver possibilidade de confusão, empregaremos a notação mais econômica $d_{A/R} = d$.

Concretamente, toda 1-forma diferencial $\omega \in \Omega_{A/R}$ pode se escrever (não-unicamente) como

$$\omega = g_1 df_1 + \cdots + g_n df_n$$

para algum $n \geq 1$ e alguns $f_i, g_i \in A$, onde manipulamos os “símbolos” df_i de acordo com as propriedades de uma derivação. Por exemplo, se $f_1, f_2, g \in A$ e $f = f_1 f_2$, então

$$gdf = g f_1 df_2 + g f_2 df_1$$

em $\Omega_{A/R}$.

Lembremos que, se M é um A -módulo, o seu *dual* é o A -módulo

$$M^\vee = \text{Hom}_A(M, A).$$

O corolário a seguir formaliza a ideia de que o módulo de 1-formas diferenciais é dual ao módulo de derivações.

Corolário 1.16. *Se A é uma R -álgebra, então*

$$\Omega_{A/R}^\vee \longrightarrow \text{Der}_R(A), \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ d$$

é um isomorfismo de A -módulos.

Demonstração. A bijetividade da aplicação do enunciado é consequência do Teorema 1.13 (tome $M = A$). A A -linearidade segue imediatamente da definição das estruturas de A -módulo em $\Omega_{A/R}^\vee$ e em $\text{Der}_R(A)$. $\square$

Segue do corolário acima que, em geral, o módulo de diferenciais é mais fundamental do que o módulo de derivações, no sentido que podemos definir $\text{Der}_R(A)$ a partir de $\Omega_{A/R}$. Apenas em casos particulares, onde a R -álgebra A é bem comportada (ver exemplo abaixo), que $\Omega_{A/R}$ será um A -módulo *reflexivo* (isto é, isomorfo ao seu bidual), e que teremos portanto $\Omega_{A/R} \cong \text{Der}_R(A)^\vee$.

Exemplo 1.17. Se $A = R[x_1, \dots, x_m]$, então $\Omega_{A/R}$ é o módulo livre gerado por $dx_1, \dots, dx_m$:

$$\Omega_{A/R} = Adx_1 \oplus \dots \oplus Adx_m$$

e $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}$ é dada explicitamente por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m.$$

Para nos certificarmos que $\Omega_{A/R}$ assim definido é de fato o módulo de 1-formas diferenciais, basta verificar a propriedade universal do Teorema 1.13 (exercício).

Observação 1.18. Considere a R -álgebra de séries formais $A = R[[x_1, \dots, x_m]]$. Embora o módulo de derivações $\text{Der}_R(A)$ seja o módulo livre gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}$, o módulo de diferenciais $\Omega_{A/R}$ não é o módulo livre gerado por dx_i . Em geral, $\Omega_{A/R}$ não é nem finitamente gerado!

Exercício 1.19 (Regra da cadeia). Seja A uma R -álgebra, $f_1, \dots, f_m \in A$, $P \in R[x_1, \dots, x_m]$ e $f = P(f_1, \dots, f_m)$. Mostre que

$$df = \frac{\partial P}{\partial x_1}(f_1, \dots, f_m) df_1 + \dots + \frac{\partial P}{\partial x_m}(f_1, \dots, f_m) df_m$$

em $\Omega_{A/R}$. Se $f = 0$ (isto é, $f_1, \dots, f_m$ satisfazem uma *relação algébrica* com coeficientes em R), o que podemos dizer dos diferenciais $df_1, \dots, df_m$? Dica: ambos os lados são R -lineares em P ; para monômios, use o Lema 1.3.

Definição 1.20. Dizemos que $\omega \in \Omega_{A/R}$ é *exata* se existe $f \in A$ tal que $df = \omega$. Neste caso, dizemos que f é uma *primitiva* de ω .

Exercício 1.21 (Lema de Poincaré algébrico). Suponha que R seja uma $\mathbb{Q}$ -álgebra (isto é, $\mathbb{Q} \subset R$). Mostre que uma 1-forma diferencial $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_m dx_m \in \Omega_{R[x_1, \dots, x_m]/R}$ é exata se e somente se

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{para todos } i, j,$$

e descreva todas as primitivas explicitamente. Em particular, se $m = 1$, toda 1-forma é exata. O que pode dar errado em característica $p > 0$? Dica: por linearidade, podemos supor que todos os f_i são homogêneos de grau $n-1$; neste caso, use a identidade de Euler para mostrar que $f = \frac{1}{n} \sum_i x_i f_i$ é uma primitiva.

Exercício 1.22. Seja R um anel qualquer e $A = R[x, x^{-1}]$ o anel dos *polinômios de Laurent* com coeficientes em R . Mostre que $dx/x \in \Omega_{A/R}$ não é exata. Em geral, mostre que $\Omega_{A/R} = Adx$ e encontre um critério simples para determinar se uma 1-forma diferencial em $\Omega_{A/R}$ é exata ou não. Dica: escreva $\omega = \sum_i c_i x^i dx$ e compare com $d(\sum_i a_i x^i)$.

Exercício 1.23. O objetivo deste exercício é fornecer uma construção alternativa para o módulo de diferenciais $\Omega_{A/R}$. Seja $I \subset A \otimes_R A$ o *ideal de aumento*, definido como o núcleo do morfismo

$$A \otimes_R A \longrightarrow A, \quad f \otimes g \longmapsto fg.$$

1. Mostre que as estruturas de A -álgebra à direita e à esquerda de $A \otimes_R A$ induzem a mesma estrutura de A -módulo no quociente I/I^2 .
2. Mostre que a aplicação

$$\delta : A \longrightarrow I/I^2, \quad f \longmapsto 1 \otimes f - f \otimes 1 + I^2$$

é uma R -derivação.

3. Seja M um A -módulo e defina $A_M = A \oplus M$. Mostre que a operação

$$(f, m) \cdot (g, n) = (fg, fn + gm)$$

induz uma estrutura de A -álgebra em A_M e que M se identifica a um ideal de A_M satisfazendo $M^2 = 0$.

4. Se $D \in \text{Der}_R(A, M)$, mostre que

$$A \otimes_R A \longrightarrow A_M, \quad f \otimes g \longmapsto (fg, fDg)$$

é um morfismo de R -álgebras que envia o ideal I ao ideal M .

5. Conclua que o par $(I/I^2, \delta)$ satisfaz a propriedade universal do Teorema 1.13.

Módulo de diferenciais, II

Um morfismo de R -álgebras $\varphi : A \rightarrow B$ induz uma aplicação A -linear

$$\Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R}, \quad g d_{A/R}(f) \longmapsto \varphi(g) d_{B/R}(\varphi(f)),$$

que se estende a uma aplicação B -linear, também denotada por φ por abuso:

$$\varphi : B \otimes_A \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R}.$$

Como B é uma A -álgebra via φ , também podemos considerar os B -módulos $\Omega_{B/A}$ e $\Omega_{B/R}$, que estão relacionados por uma aplicação B -linear natural

$$\Omega_{B/R} \longrightarrow \Omega_{B/A}, \quad d_{B/R}(f) \longmapsto d_{B/A}(f).$$

Teorema 1.24 (Primeira sequência exata fundamental). *Com as notações acima, temos uma sequência exata de B -módulos*

$$B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{B/R} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

A demonstração do teorema acima se apoiará sobre o seguinte fato geral, cuja demonstração deixamos como exercício para o leitor.

Lema 1.25. *Seja B um anel. Uma sequência de B -módulos*

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

é exata se e somente se, para todo B -módulo N , a sequência de B -módulos induzida

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(M'', N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(M', N)$$

é exata. □

Demonstração do teorema. Pelo Lema 1.25, basta mostrar que, para todo B -módulo N , a sequência

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/A}, N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_B(\Omega_{B/R}, N) \\ & & \downarrow \\ & & \operatorname{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_{A/R}, N) \end{array}$$

é exata. Note que existe um isomorfismo natural

$$\operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/R}, N) \cong \operatorname{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_{A/R}, N).$$

Então, segue do Teorema 1.13 que a sequência acima é isomorfa a

$$0 \longrightarrow \operatorname{Der}_A(B, N) \longrightarrow \operatorname{Der}_R(B, N) \longrightarrow \operatorname{Der}_R(A, N).$$

A aplicação $\text{Der}_A(B, N) \rightarrow \text{Der}_R(B, N)$ é injetiva pois é induzida pela inclusão $\text{Hom}_A(B, N) \subset \text{Hom}_R(B, N)$. Note que a aplicação $\text{Der}_R(B, N) \rightarrow \text{Der}_R(A, N)$ é dada por $D \mapsto D \circ \varphi$. Se $D \in \text{Der}_A(B, N)$, então $D \circ \varphi = 0$ pela primeira afirmação do Lema 1.3. Reciprocamente, se $D \in \text{Der}_R(B, N)$ é tal que $D \circ \varphi = 0$, então segue da regra de Leibniz que D é A -linear, isto é que $D \in \text{Der}_A(B, N)$. $\square$

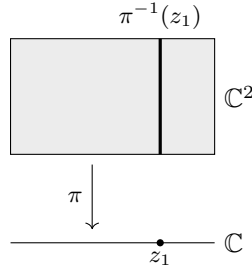
Exemplo 1.26. Seja $A = R[x_1]$, $B = R[x_1, x_2]$ e $\varphi : A \rightarrow B$ a inclusão. Denotemos, para simplificar, todas as diferenciais $d_{A/R}$, $d_{B/R}$ e $d_{B/A}$ por d . Temos:

$$\Omega_{A/R} = Adx_1, \quad \Omega_{B/R} = Bdx_1 \oplus Bdx_2, \quad \Omega_{B/A} = Bdx_2,$$

de forma que a primeira sequência exata fundamental é simplesmente

$$Bdx_1 \longrightarrow Bdx_1 \oplus Bdx_2 \longrightarrow Bdx_2 \longrightarrow 0.$$

Geometricamente (digamos, para $R = \mathbb{C}$), A é o anel de funções da reta, B é o anel de funções do plano e φ corresponde à projeção $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1$. A sequência exata acima expressa que uma 1-forma no plano se decompõe numa parte “horizontal”, vinda da reta, e numa parte “vertical”, ao longo das fibras de π .



Corolário 1.27. *Seja A uma R -álgebra e $S \subset A$ um subconjunto multiplicativo. A aplicação natural*

$$S^{-1}\Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{S^{-1}A/R}, \quad \frac{df}{s} \longmapsto \frac{1}{s}d\left(\frac{f}{1}\right)$$

é um isomorfismo de $S^{-1}A$ -módulos.

Demonstração. Note que $S^{-1}A \otimes_A \Omega_{A/R}$ se identifica a $S^{-1}\Omega_{A/R}$ via $\frac{f}{s} \otimes \omega \mapsto \frac{f\omega}{s}$. Temos então uma sequência exata

$$S^{-1}\Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{S^{-1}A/R} \longrightarrow \Omega_{S^{-1}A/A} \longrightarrow 0.$$

Se $f \in S^{-1}A$, então existe $s \in S$ tal que $sf \in A$. Logo, $0 = d(sf) = fds + sdf = sdf$. Segue que $df = 0$, pois s é unidade em $S^{-1}A$. Portanto, $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$. Resta mostrar que $S^{-1}\Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{S^{-1}A/R}$ é injetivo. Para isto, basta notar que

$$\Omega_{S^{-1}A/R} \longrightarrow S^{-1}\Omega_{A/R}, \quad d\left(\frac{f}{s}\right) \longmapsto \frac{df}{s} - \frac{fds}{s^2}$$

está bem definida e define um inverso à esquerda $S^{-1}A$ -linear de $S^{-1}\Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{S^{-1}A/R}$. $\square$

Exemplo 1.28. Suponha que $R = k$ seja um corpo e que A seja um domínio. Seja K o corpo de frações de A . Então podemos identificar $\Omega_{K/k}$ com $K \otimes_A \Omega_{A/k}$. Por exemplo, se $A = k[x_1, \dots, x_m]$, então $K = k(x_1, \dots, x_m)$ e

$$\Omega_{K/k} \cong Kdx_1 \oplus \dots \oplus Kdx_m.$$

Observação 1.29. Na situação do exemplo acima, notemos que nem sempre a aplicação natural $\Omega_{A/k} \rightarrow \Omega_{K/k}$ é injetiva (isto é, nem sempre podemos enxergar $\Omega_{A/k}$ dentro de $\Omega_{K/k}$). Isto se reduz a decidir se o A -módulo $\Omega_{A/k}$ tem torção ou não.

Proposição 1.30 (Mudança de base). *Seja A uma R -álgebra, $R \rightarrow R'$ um morfismo de anéis e $A' = R' \otimes_R A$, vista como R' -álgebra. Então existe um isomorfismo de A' -módulos*

$$A' \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{\sim} \Omega_{A'/R'}, \quad a' \otimes df \longmapsto a' d_{A'/R'}(1 \otimes f).$$

Demonstração. Denotemos $\iota : A \rightarrow A'$, $f \mapsto 1 \otimes f$. Seja M um A' -módulo. Afirmamos que

$$\text{Der}_{R'}(A', M) \longrightarrow \text{Der}_R(A, M), \quad D' \longmapsto D' \circ \iota$$

é bijetiva. Ela é injetiva pois A' é gerado como R' -módulo por $\iota(A)$, e $D'(r' \otimes f) = r' D'(1 \otimes f)$. Para a sobrejetividade, dada $D \in \text{Der}_R(A, M)$, a aplicação $R' \times A \rightarrow M$, $(r', f) \mapsto r' D(f)$, é R -bilinear, logo induz uma aplicação R' -linear $D' : A' \rightarrow M$ com $D'(r' \otimes f) = r' D(f)$; a regra de Leibniz para D' se verifica em tensores puros:

$$\begin{aligned} D'((r_1 \otimes f_1)(r_2 \otimes f_2)) &= r_1 r_2 (f_1 D(f_2) + f_2 D(f_1)) \\ &= (r_1 \otimes f_1) D'(r_2 \otimes f_2) + (r_2 \otimes f_2) D'(r_1 \otimes f_1). \end{aligned}$$

Aplicando isto a $M = A' \otimes_A \Omega_{A/R}$ e $D = (1 \otimes 1) \otimes d_{A/R}$, obtemos uma R' -derivação $\delta : A' \rightarrow A' \otimes_A \Omega_{A/R}$ com $\delta(r' \otimes f) = (r' \otimes 1) \otimes d_{A/R} f$. Basta verificar que o par $(A' \otimes_A \Omega_{A/R}, \delta)$ satisfaz a propriedade universal do Teorema 1.13. Se $D' \in \text{Der}_{R'}(A', M)$, então $D' \circ \iota \in \text{Der}_R(A, M)$ corresponde a uma única aplicação A -linear $\rho : \Omega_{A/R} \rightarrow M$ com $\rho \circ d_{A/R} = D' \circ \iota$, isto é, a uma única aplicação A' -linear $\rho' : A' \otimes_A \Omega_{A/R} \rightarrow M$ com $\rho' \circ \delta \circ \iota = D' \circ \iota$. Pela injetividade acima, a última condição equivale a $\rho' \circ \delta = D'$. Pela unicidade no Teorema 1.13, o isomorfismo resultante $A' \otimes_A \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{A'/R'}$ envia $\delta(1 \otimes f) = (1 \otimes 1) \otimes df$ em $d_{A'/R'}(1 \otimes f)$, isto é, é a aplicação do enunciado. $\square$

Note que $A' \otimes_A \Omega_{A/R} \cong R' \otimes_R \Omega_{A/R}$. Por exemplo, se A é uma $\mathbb{Z}$ -álgebra e p é primo, tomando $R' = \mathbb{F}_p$ obtemos $\Omega_{(A/pA)/\mathbb{F}_p} \cong \Omega_{A/\mathbb{Z}}/p\Omega_{A/\mathbb{Z}}$: diferenciais comutam com redução módulo p .

Exercício 1.31. Sejam A e B duas R -álgebras e $C = A \otimes_R B$. Mostre que

$$\Omega_{C/R} \cong (C \otimes_A \Omega_{A/R}) \oplus (C \otimes_B \Omega_{B/R}).$$

Dica: denotando $i_A : A \rightarrow C$ e $i_B : B \rightarrow C$ as aplicações naturais, mostre que, para todo C -módulo M , a aplicação $\text{Der}_R(C, M) \rightarrow \text{Der}_R(A, M) \times \text{Der}_R(B, M)$, $D \mapsto (D \circ i_A, D \circ i_B)$, é bijetiva, com inversa $(D_1, D_2) \mapsto (f \otimes g \mapsto g D_1(f) + f D_2(g))$. Reencontre assim $\Omega_{R[x_1, \dots, x_m]/R}$ a partir do caso $m = 1$.

Teorema 1.32 (Segunda sequência exata fundamental). *Suponha que $B = A/I$ para algum ideal I de A e que $\varphi : A \rightarrow B$ seja a aplicação quociente. Então, temos uma aplicação B -linear bem definida*

$$I/I^2 \longrightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R}, \quad f + I^2 \longmapsto 1 \otimes d_{A/R}(f)$$

e uma sequência exata de B -módulos

$$I/I^2 \longrightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{B/R} \longrightarrow 0. \quad (2)$$

Demonstração. Note que podemos identificar $\Omega_{A/R}/I\Omega_{A/R}$ com $B \otimes_A \Omega_{A/R}$ via $\omega + I\Omega_{A/R} \mapsto 1 \otimes \omega$. Considere a aplicação R -linear

$$I \longrightarrow \Omega_{A/R}/I\Omega_{A/R}, \quad f \longmapsto df + I\Omega_{A/R},$$

onde $d = d_{A/R}$. Se $f, g \in I$, então

$$d(fg) = f dg + g df \in I\Omega_{A/R},$$

donde deduzimos que a aplicação anterior se fatora por uma aplicação R -linear

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A/R}/I\Omega_{A/R}, \quad f + I^2 \longmapsto df + I\Omega_{A/R}. \quad (3)$$

Note que ambos o domínio e o contradomínio são B -módulos de maneira natural. Por exemplo, se $g + I \in B$ e $f + I^2 \in I/I^2$, então

$$(g + I)(f + I^2) = gf + I^2,$$

pois $f \in I$. Como

$$d(gf) + I\Omega_{A/R} = gdf + f dg + I\Omega_{A/R} = gdf + I\Omega_{A/R} = (g + I)(df + I\Omega_{A/R}),$$

concluimos que a aplicação (3) é B -linear, o que finaliza a prova da primeira afirmação do enunciado.

Pelo Lema 1.25, a sequência (2) é exata se e somente se

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_B(\Omega_{B/R}, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_{A/R}, N) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \text{Hom}_B(I/I^2, N) \end{array}$$

é exata para todo B -módulo N . Usando o Teorema 1.13 e o fato que I/I^2 é isomorfo a $B \otimes_A I$, obtemos

$$0 \longrightarrow \text{Der}_R(B, N) \longrightarrow \text{Der}_R(A, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(I, N)$$

onde todas as aplicações são induzidas pelas composições naturais. Em particular, $\text{Der}_R(A, N) \rightarrow \text{Hom}_A(I, N)$ é dada pela restrição $D \mapsto D|_I$ e a verificação da exatidão da sequência acima é imediata. $\square$

Corolário 1.33. Se $\varphi : A \rightarrow B$ é sobrejetiva, então $\Omega_{B/A} = 0$.

Demonstração. Segue imediatamente da combinação entre a primeira e a segunda sequência exata fundamental. Ou ainda, segue da parte 1 do Lema 1.3. $\square$

Exemplo 1.34 (Hipersuperfícies afins). Seja $A = R[x_1, \dots, x_m]$, $P \in A$ não-constante e $B = A/(P)$. Denotemos $d = d_{A/R}$, de forma que

$$\Omega_{A/R} = A dx_1 \oplus \dots \oplus A dx_m \quad \text{e} \quad dP = \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial P}{\partial x_m} dx_m.$$

Segue então do Teorema 1.32 que

$$\Omega_{B/R} \cong \frac{B \otimes_A \Omega_{A/R}}{B(1 \otimes dP)} \cong \frac{B(1 \otimes dx_1) \oplus \dots \oplus B(1 \otimes dx_m)}{B(1 \otimes dP)}.$$

Na prática, costumamos cometer o abuso de denotar $1 \otimes df = df$, donde

$$\Omega_{B/R} \cong \frac{B dx_1 \oplus \dots \oplus B dx_m}{B dP} \cong \frac{B^{\oplus m}}{B(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_m})}.$$

Exercício 1.35. Calcule $\text{Der}_R(B)$ explicitamente. Dica: pelo Corolário 1.16, uma R -derivada D de B é determinada por $(D(x_1), \dots, D(x_m)) \in B^m$, sujeito à condição $\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} D(x_i) = 0$.

Exemplo 1.36 (Extensões de corpos). Seja K um corpo e $L = K[x]/(P)$, com $P \in K[x]$ irredutível; denote por α a classe de x . Pelo Exemplo 1.34,

$$\Omega_{L/K} \cong \frac{L dx}{L P'(\alpha) dx}.$$

Se P é separável, então $P'(\alpha) \neq 0$ e, como L é um corpo, $\Omega_{L/K} = 0$. Por outro lado, seja k um corpo de característica $p > 0$, $L = k(t)$ e $K = k(s)$, onde $s = t^p$.

Então $L = K[x]/(x^p - s)$ (o polinômio $x^p - s$ é irredutível sobre K) e, como $\frac{d}{dx}(x^p - s) = px^{p-1} = 0$,

$$\Omega_{L/K} = L dt \neq 0.$$

Note que $d(t^p) = pt^{p-1}dt = 0$, como deveria, já que $t^p \in K$.

Exercício 1.37. Seja L/K uma extensão finita de corpos. Mostre que $\Omega_{L/K} = 0$ se e somente se L/K é separável. Dica: se L/K é separável, use o teorema do elemento primitivo e o exemplo acima. Reciprocamente, se L/K não é separável, existe um corpo intermediário $K \subset L' \subsetneq L$ tal que $L = L'(\beta)$ com $\beta^p \in L'$ (verifique que $x^p - \beta^p$ é irredutível sobre L'); use a primeira sequência exata fundamental para obter uma sobrejeção $\Omega_{L/K} \rightarrow \Omega_{L/L'} \neq 0$.

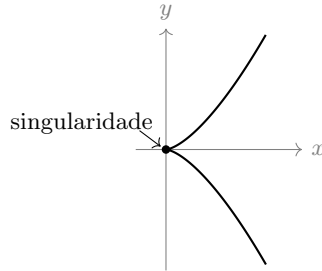
Exemplo 1.38 (Curva cuspidal afim). Seja $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$. Então

$$\Omega_{A/\mathbb{C}} \cong \frac{Adx \oplus Ady}{A(-3x^2dx + 2ydy)}.$$

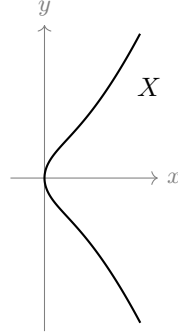
Seja $\omega = 3ydx - 2xdy \in \Omega_{A/\mathbb{C}}$. Então

$$y\omega = 3y^2dx - 2xydy = 3y^2dx - 3x^3dx = 0.$$

Como ambos $\omega \neq 0$ em $\Omega_{A/\mathbb{C}}$ e $y \neq 0$ em A , segue que o A -módulo $\Omega_{A/\mathbb{C}}$ tem torção não-trivial (cf. Observação 1.29). Este fenômeno está ligado à singularidade da curva algébrica $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z^3\}$ na origem (desenho dos pontos reais):



Exemplo 1.39 (Curva elíptica afim). Seja $R = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[x, y]$, $P = y^2 - Q$, onde $Q = x^3 + x$, e $B = A/(P)$. Os pontos reais da curva $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z^3 + z\}$ são desenhados abaixo.



Afirmação: o B -módulo $\Omega_{B/\mathbb{C}}$ é livre de posto 1. Segue do Exemplo 1.34 que $\Omega_{B/\mathbb{C}}$ é gerado por dx e dy , satisfazendo a relação

$$dP = -Q'dx + 2ydy = 0,$$

onde $Q' = \frac{dQ}{dx} = 3x^2 + 1$. Como Q e Q' são coprimos, existem $F, G \in \mathbb{C}[x]$ tais que

$$FQ + GQ' = 1.$$

De fato, podemos tomar $F = -9x/2$ e $G = 3x^2/2 + 1$. Seja

$$\omega = Fydx + 2Gdy.$$

Então

$$\begin{aligned} y\omega &= Fy^2dx + 2Gydy = FQdx + 2Gydy \\ &= (1 - GQ')dx + 2Gydy = (1 - GQ')dx + GQ'dx = dx. \end{aligned}$$

De maneira similar, mostramos que

$$\frac{Q'}{2}\omega = \cdots = dy.$$

Isto mostra que $\Omega_{B/\mathbb{C}}$ é gerado por ω . O final da demonstração fica como exercício para o leitor.

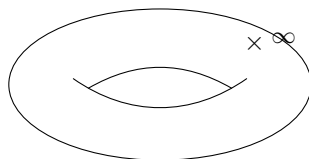
Exercício 1.40. Com as notações do exemplo acima, mostre que não existe $f \in B$ não-nulo tal que $f\omega \in BdP$. Dica: escreva $f\omega = g dP$ em coordenadas na base dx, dy , use $FQ + GQ' = 1$ para concluir que $g = 0$, e lembre que B é um domínio.

Observação 1.41. No exemplo acima, se L é o corpo de frações de B , então a aplicação natural $\Omega_{B/\mathbb{C}} \rightarrow \Omega_{L/\mathbb{C}}$ é injetiva. Em $\Omega_{L/\mathbb{C}}$, podemos escrever

$$\omega = \frac{dx}{y}.$$

A 1-forma acima é conhecida na literatura clássica como “1-forma do primeiro tipo”. Geometricamente, os pontos complexos de X formam uma *curva elíptica*

(topologicamente, um toro) da qual removemos um ponto, o “ponto no infinito”.
A forma $\omega = dx/y$ se estende a uma 1-forma holomorfa sem zeros no toro inteiro.



Aula 2

Suavidade, I

O conceito de suavidade para uma R -álgebra A é uma versão algébrica da noção de *submersão* em geometria diferencial. Por exemplo, veremos que $\mathbb{C}[x, y]$ é uma $\mathbb{C}[x]$ -álgebra suave, o que corresponde ao fato que a projeção na primeira coordenada $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é uma submersão (cf. o desenho do exemplo após a primeira sequência exata fundamental). Quando R é um corpo, a suavidade se reduz à “ausência de singularidades”. Por exemplo, se $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x, y]/(P)$, com $P \in \mathbb{C}[x, y]$ não-nulo, então A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave se e somente se a curva algébrica $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\}$ não tem singularidades.

A ideia chave nesta formulação puramente algébrica de suavidade reside na utilização sistemática de anéis com elementos *nilpotentes* (i.e., $f \in A$ tal que $f^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$). Para mais detalhes sobre álgebras suaves, veja [1, §25 e §28] e [5].

Definição 2.1. Seja R um anel. A R -álgebra dos *números duais* é definida por

$$R[\varepsilon] = R[t]/(t^2), \quad \varepsilon = t + (t^2).$$

Assim, um elemento de $R[\varepsilon]$ se escreve de maneira única como $c_0 + c_1\varepsilon$, com $c_0, c_1 \in R$, e a multiplicação é dada por $(c_0 + c_1\varepsilon)(c'_0 + c'_1\varepsilon) = c_0c'_0 + (c_0c'_1 + c_1c'_0)\varepsilon$. Vejamos um exemplo simples de como nilpotentes se relacionam com conceitos diferenciais.

Exemplo 2.2. Seja $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x, y]/(P)$, com $P \neq 0$. Um morfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}[\varepsilon]$$

é inteiramente determinado pelas imagens de $x + (P)$ e $y + (P)$. Denotemos

$$\varphi(x + (P)) = z + v_1\varepsilon, \quad \varphi(y + (P)) = w + v_2\varepsilon.$$

Para que φ esteja bem definido, é necessário e suficiente que

$$P(z + v_1\varepsilon, w + v_2\varepsilon) = 0 \tag{4}$$

em $\mathbb{C}[\varepsilon]$. Pela “fórmula de Taylor”, se S é uma R -álgebra e $a, b \in S$, então

$$P(x, y) = P(a, b) + \frac{\partial P}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)(y - b) + (x - a, y - b)^2$$

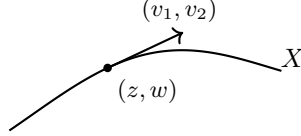
em $S[x, y]$. Em particular, temos

$$P(z + v_1\varepsilon, w + v_2\varepsilon) = P(z, w) + \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z, w)v_1 + \frac{\partial P}{\partial y}(z, w)v_2 \right) \varepsilon,$$

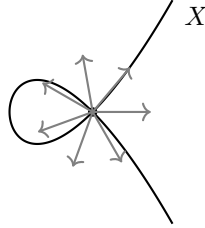
de forma que (4) é equivalente a

$$P(z, w) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x}(z, w)v_1 + \frac{\partial P}{\partial y}(z, w)v_2 = 0.$$

Geometricamente, a primeira equação acima diz que (z, w) é um ponto na curva algébrica X definida por $P = 0$. A segunda diz que (v_1, v_2) é um vetor tangente a X no ponto (z, w) .



Num ponto singular, a segunda condição pode não impor restrição alguma. Por exemplo, para $P = y^2 - x^2(x + 1)$ e $(z, w) = (0, 0)$, temos $\frac{\partial P}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) = 0$, de forma que *todo* vetor $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ é “tangente” a X na origem, embora X seja uma curva:



Definição 2.3. Dizemos que uma R -álgebra A é *suave* se A é de apresentação finita e se, para todo diagrama de R -álgebras da forma

$$\begin{array}{ccccc} A & & \varphi_0 & & \\ \uparrow & & \searrow & & \\ R & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S/I \end{array}$$

onde I é um ideal de S satisfazendo $I^2 = 0$, existe um morfismo de R -álgebras $\varphi : A \rightarrow S$ fazendo o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & & \varphi_0 & & \\ \uparrow & & \searrow \varphi & & \\ R & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S/I \end{array}$$

comutar. O morfismo φ é dito um *levantamento* de φ_0 . (Em [1, §25], a propriedade de levantamento, sem a hipótese de apresentação finita, é chamada de *0-suavidade*.)

Observação 2.4 (Suavidade e submersão). Suponha que R e A sejam $\mathbb{C}$ -álgebras de tipo finito, correspondendo a variedades algébricas não-singulares Y e X . Considerando que morfismos para $\mathbb{C}[\varepsilon]$ correspondem a “vetores tangentes”, a suavidade de A como R -álgebra corresponde ao fato que a aplicação tangente de X para Y é sobrejetiva.

Exercício 2.5. Mostre que $A = R[x_1, \dots, x_m]$ é uma R -álgebra suave. Dica: um morfismo de R -álgebras $A \rightarrow S/I$ é determinado pelas imagens dos x_i ; escolha levantamentos arbitrários em S .

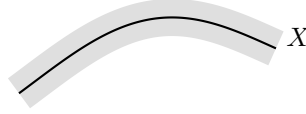
Exemplo 2.6. Seja $R = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[x, y]/(P)$, onde $P \neq 0$. Mostremos que A é suave se e somente se $P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ são coprimos, isto é,

$$\left(P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \mathbb{C}[x, y]. \quad (5)$$

Pelo Nullstellensatz, a condição acima é equivalente à condição geométrica seguinte: para todo (z, w) tal que $P(z, w) = 0$, temos

$$\nabla P(z, w) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(z, w), \frac{\partial P}{\partial y}(z, w)\right) \neq (0, 0).$$

Mostremos primeiro a ida. Seja $A^{(1)} = \mathbb{C}[x, y]/(P^2)$. Geometricamente, $A^{(1)}$ é o anel de funções de uma “vizinhança infinitesimal de primeira ordem” de X no plano:



Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow \text{id} & \uparrow \psi & \searrow & \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & A^{(1)} & \longrightarrow & A \end{array}$$

Como ψ é um levantamento da identidade, existem $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x, y]$ tais que

$$\psi(x + (P)) = x + f_1 P + (P^2), \quad \psi(y + (P)) = y + f_2 P + (P^2),$$

com

$$P(x + f_1 P, y + f_2 P) \in (P^2).$$

Pela fórmula de Taylor, a última condição acima é equivalente a

$$1 + \frac{\partial P}{\partial x} f_1 + \frac{\partial P}{\partial y} f_2 \in (P),$$

que, por sua vez, é equivalente a (5). Para a volta, observamos que, se $P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ são coprimos, então existe um morfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\psi : A \rightarrow A^{(1)}$ como acima. Considere um diagrama da forma

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow \varphi_0 & \uparrow & \searrow & \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S/I \end{array}$$

com $I^2 = 0$. Se $h_1, h_2 \in S$ são tais que $\varphi_0(x+(P)) = h_1+I$ e $\varphi_0(y+(P)) = h_2+I$, então podemos completar um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A^{(1)} & \longrightarrow & A \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ S & \longrightarrow & S/I \end{array}$$

onde $\varphi_1(x+(P^2)) = h_1$ e $\varphi_1(y+(P^2)) = h_2$. Note que φ_1 está bem definida pois $I^2 = 0$. Agora basta notar que $\varphi = \varphi_1 \circ \psi : A \rightarrow S$ é um levantamento de $\varphi_0 : A \rightarrow S/I$.

Exercício 2.7. Generalize o exemplo acima para $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/(P)$. Dica: a condição passa a ser $(P, \frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_m}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$, e o levantamento ψ é construído com m polinômios $f_1, \dots, f_m$.

Suavidade, II

Seja A um anel. Lembremos que um A -módulo M é dito *projetivo* se toda sequência exata curta de A -módulos da forma

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

cinde. De maneira equivalente, M é projetivo se toda aplicação sobrejetiva A -linear $N \rightarrow M$ admite uma seção A -linear.

Exercício 2.8. Mostre que:

1. O A -módulo trivial A é projetivo.
2. Soma direta arbitrária de A -módulos projetivos é projetiva.

Conclua que todo A -módulo livre é projetivo. O que acontece se A é um corpo? Dica: uma aplicação A -linear $A \rightarrow N$ é determinada pela imagem de 1.

Exemplo 2.9. Nem todo módulo projetivo é livre. Se $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$, então I é um A -módulo projetivo. De fato, pode-se verificar que, dada uma sobrejeção $\pi : N \rightarrow I$, onde $\pi(n_1) = 1 + \sqrt{-5}$ e $\pi(n_2) = 2$, então

$$s : I \rightarrow N, \quad s(2a + (1 + \sqrt{-5})b) = ((1 - \sqrt{-5})a + 3b)n_1 - (2a + (1 + \sqrt{-5})b)n_2$$

define uma seção A -linear de π (note que $(1 - \sqrt{-5})a + 3b = \frac{1 - \sqrt{-5}}{2}(2a + (1 + \sqrt{-5})b)$, de forma que s só depende do elemento $2a + (1 + \sqrt{-5})b \in I$, e não da escolha de a, b). O A -módulo I não é livre pois não é principal. Exercício: mostre que um ideal não-nulo I de um domínio A é um A -módulo livre se e somente se I é principal.

Exercício 2.10. Mostre que M é projetivo se e somente se é fator direto de um módulo livre. Isto é, existe um módulo livre F e um módulo M' tais que $F = M \oplus M'$. Dica: para a ida, aplique a definição a uma sobrejeção $F \rightarrow M$, com F livre; para a volta, mostre que um fator direto de um módulo projetivo é projetivo.

Lembremos que, se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de A e M é um A -módulo, então $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$ denota a localização de M com respeito ao conjunto multiplicativo $S = A \setminus \mathfrak{p}$. A localização $A_{\mathfrak{p}}$ possui uma estrutura natural de A -álgebra, de maneira que $M_{\mathfrak{p}}$ é isomorfo a $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$.

Teorema 2.11. *Seja M um A -módulo de apresentação finita. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. M é projetivo.
2. $M_{\mathfrak{p}}$ é um $A_{\mathfrak{p}}$ -módulo livre para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A .
3. $M_{\mathfrak{m}}$ é um $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo livre para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A .

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.5 e Teorema 7.12] □

Sintetizamos o teorema acima no enunciado “um módulo de apresentação finita é projetivo se e somente se é localmente livre”. Em particular, se A é um anel local (isto é, A possui apenas um único ideal maximal), então vale a recíproca do Exercício 2.8: todo A -módulo projetivo de apresentação finita é livre (pelo teorema de Kaplansky [1, Teorema 2.5], a hipótese de apresentação finita é na verdade desnecessária).

Definição 2.12. Seja M um A -módulo projetivo de apresentação finita. O posto de M em $\mathfrak{p}$ é o único $r \in \mathbb{N}$ tal que $M_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}^{\oplus r}$. Se o posto é igual a r em todos os primos, dizemos simplesmente que r é o posto de M .

Exemplo 2.13. Suponha que A seja um domínio e seja $K = \text{Frac}(A)$, de forma que K é a localização de A no ideal primo (0) . Então o posto de um A -módulo projetivo M é igual a $\dim_K(K \otimes_A M)$.

Teorema 2.14. *Seja A uma R -álgebra.*

1. *Se B é uma A -álgebra suave, então a sequência*

$$0 \longrightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

é exata e admite uma cisão.

2. *Se $B = A/I$ é uma R -álgebra suave, então a sequência*

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow 0$$

é exata e admite uma cisão.

(Cf. [1, Teoremas 25.1 e 25.2].)

Lembremos que, se M é um A -módulo, denotamos por $A_M = A \oplus M$ o anel com multiplicação $(f, m)(g, n) = (fg, fn + gm)$, no qual $M = 0 \oplus M$ é um ideal de quadrado nulo e $A_M/M \cong A$ (cf. Exercício 1.23). A observação chave é a

seguinte: se $\psi : A \rightarrow C$ é um morfismo de anéis e N é um C -módulo, então uma aplicação da forma

$$A \longrightarrow C_N, \quad f \longmapsto (\psi(f), D(f))$$

é um morfismo de anéis se e somente se $D : A \rightarrow N$ satisfaz a regra de Leibniz, e é R -linear se e somente se D é R -linear. Em outras palavras, levantamentos de ψ a C_N são o mesmo que derivações $D \in \text{Der}_R(A, N)$.

Demonstração. 1. Pela primeira sequência exata fundamental, basta construir uma retração B -linear $r : \Omega_{B/R} \rightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R}$ da aplicação $\varphi : B \otimes_A \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{B/R}$ (de fato, a existência de r implica que φ é injetiva e que a sequência cinde). Seja $N = B \otimes_A \Omega_{A/R}$ e considere o anel B_N . Pela observação acima,

$$A \longrightarrow B_N, \quad f \longmapsto (\varphi(f), 1 \otimes d_{A/R}f)$$

é um morfismo de R -álgebras, que faz de B_N uma A -álgebra. A projeção $B_N \rightarrow B_N/N = B$ é então um morfismo de A -álgebras, e $N^2 = 0$. Como B é uma A -álgebra suave, a identidade $B \rightarrow B$ admite um levantamento $\sigma : B \rightarrow B_N$ que é um morfismo de A -álgebras. Necessariamente, $\sigma(b) = (b, D(b))$ para alguma $D \in \text{Der}_R(B, N)$ e, como σ é A -linear, $D(\varphi(f)) = 1 \otimes d_{A/R}f$ para todo $f \in A$. Seja $r : \Omega_{B/R} \rightarrow N$ a aplicação B -linear correspondente a D pelo Teorema 1.13. Então

$$r(\varphi(b \otimes d_{A/R}f)) = r(b d_{B/R}\varphi(f)) = bD(\varphi(f)) = b \otimes d_{A/R}f,$$

isto é, $r \circ \varphi = \text{id}$.

2. Pela segunda sequência exata fundamental, basta construir uma retração B -linear da aplicação $I/I^2 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R}$. Considere a R -álgebra $S = A/I^2$ e seu ideal I/I^2 , de quadrado nulo, de forma que $S/(I/I^2) = B$. Como B é uma R -álgebra suave, a identidade de B admite um levantamento $\sigma : B \rightarrow A/I^2$ que é um morfismo de R -álgebras. Denotemos por $\pi : A \rightarrow B$ a projeção e por $\bar{f}$ a classe de $f \in A$ em A/I^2 , e definimos

$$\delta : A \longrightarrow I/I^2, \quad f \longmapsto \bar{f} - \sigma(\pi(f)).$$

Note que δ de fato toma valores em I/I^2 , pois σ é um levantamento. Como I/I^2 é um B -módulo, também é um A -módulo via π . Afirmamos que $\delta \in \text{Der}_R(A, I/I^2)$. A R -linearidade é clara. Para a regra de Leibniz, escrevemos $\bar{f} = \sigma(\pi(f)) + \delta(f)$ e calculamos em A/I^2 :

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} = \sigma(\pi(f))\sigma(\pi(g)) + \sigma(\pi(f))\delta(g) + \sigma(\pi(g))\delta(f) + \delta(f)\delta(g).$$

O último termo é nulo, pois $(I/I^2)^2 = 0$, e $\sigma(\pi(f))\delta(g) = f\delta(g)$, pois a estrutura de A/I^2 -módulo de I/I^2 se fatora por B e $\sigma(\pi(f)) \equiv \bar{f} \pmod{I/I^2}$. Como σ é multiplicativa, concluímos que $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$. Pelo Teorema 1.13, δ induz uma aplicação A -linear $\Omega_{A/R} \rightarrow I/I^2$ e portanto uma aplicação B -linear

$$r : B \otimes_A \Omega_{A/R} \longrightarrow I/I^2, \quad b \otimes d_{A/R}f \longmapsto b\delta(f).$$

Finalmente, se $f \in I$, então $\pi(f) = 0$ e $\delta(f) = \bar{f}$, ou seja, $r(1 \otimes d_{A/R}f) = f + I^2$. Isto mostra que r é uma retração de $I/I^2 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R}$. $\square$

Exemplo 2.15 (Regular não implica suave). Retomemos o Exemplo 1.36: $K = k(s)$, $L = k(t)$, $s = t^p$, onde k tem característica $p > 0$. O anel L é um corpo, logo não tem “singularidades” (seu único anel local é um corpo, que é um anel local regular; cf. o Exemplo 2.23 abaixo). Ainda assim, L não é uma K -álgebra suave. De fato, escrevendo $L = K[x]/(P)$ com $P = x^p - s$, temos $I/I^2 = (P)/(P^2) \cong L$, gerado pela classe de P , e a aplicação

$$I/I^2 \longrightarrow L \otimes_{K[x]} \Omega_{K[x]/K} = L dx, \quad P + I^2 \longmapsto P'(t) dx = 0$$

não é injetiva, contrariando o Teorema 2.14. Sobre corpos não perfeitos, suavidade é portanto uma condição mais forte que regularidade. (Sobre corpos perfeitos, como $\mathbb{C}$, as duas noções coincidem para álgebras de tipo finito.)

Teorema 2.16. *Seja A uma R -álgebra suave. Então $\Omega_{A/R}$ é um A -módulo projetivo de apresentação finita.*

Demonstração. Como A é de apresentação finita, podemos escrever $A = P/I$, onde $P = R[x_1, \dots, x_m]$ e I é um ideal finitamente gerado de P . Pelo Teorema 2.14, a sequência

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A \otimes_P \Omega_{P/R} \longrightarrow \Omega_{A/R} \longrightarrow 0$$

é exata e admite uma cisão. Como $A \otimes_P \Omega_{P/R} \cong A^{\oplus m}$ é livre, segue que $\Omega_{A/R}$ é um fator direto de $A^{\oplus m}$, logo projetivo. Além disso, I/I^2 é finitamente gerado, pois I o é, de forma que $\Omega_{A/R} \cong A^{\oplus m}/(\text{imagem de } I/I^2)$ é de apresentação finita. $\square$

Exemplo 2.17. Seja $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$. Vimos no Exemplo 1.38 que o A -módulo $\Omega_{A/R}$ tem torção não-trivial, logo não pode ser projetivo (por quê?). Segue do teorema que A não é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave.

Definição 2.18. Seja A uma R -álgebra suave e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de A . A *dimensão relativa* de A sobre R em $\mathfrak{p}$ é o posto de $\Omega_{A/R}$ em $\mathfrak{p}$. Se $\Omega_{A/R}$ é de posto constante igual a r , dizemos simplesmente que r é a dimensão relativa de A sobre R .

Exemplo 2.19. $R[x_1, \dots, x_m]$ é de dimensão relativa m sobre R .

Exemplo 2.20. Seja $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/(P)$, para algum P irredutível e não-constante. Suponha que A seja uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave. Então A é de dimensão relativa $m - 1$ sobre $\mathbb{C}$. De fato, basta notar que, se K denota o corpo de frações de A , então

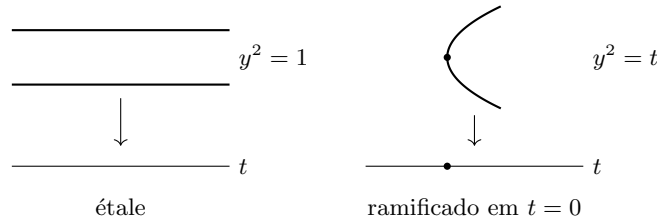
$$\Omega_{K/\mathbb{C}} = \frac{K dx_1 \oplus \dots \oplus K dx_m}{K dP}$$

é um K -espaço vetorial de dimensão $m - 1$.

Exemplo 2.21 (Álgebras étale). As álgebras suaves de dimensão relativa 0 são chamadas de *étale*. Seguem dois exemplos fundamentais, onde A é um anel qualquer (no papel do anel de base).

1. *Localizações.* Seja $f \in A$ e $A[1/f] = A[t]/(ft-1)$. Considere um diagrama de A -álgebras como na definição de suavidade, com $\varphi_0 : A[1/f] \rightarrow S/I$ e $I^2 = 0$. Então f é invertível em S/I , isto é, existe $g \in S$ tal que $fg = 1 - e$ com $e \in I$. Como $(1-e)(1+e) = 1 - e^2 = 1$, segue que f é invertível em S , e $t \mapsto f^{-1}$ define o (único) levantamento. Como $A[1/f]$ é claramente de apresentação finita, ele é suave sobre A e, pelo Corolário 1.27, $\Omega_{A[1/f]/A} = 0$.
2. *Extensões “separáveis”.* Seja $B = A[x]/(P)$, com $P \in A[x]$ tal que $P'(\bar{x})$ é invertível em B . Dado $\varphi_0 : B \rightarrow S/I$ como acima, seja $h \in S$ tal que $\varphi_0(\bar{x}) = h + I$, de forma que $P(h) \in I$. Como $P'(h)$ é invertível módulo I , ele é invertível em S , pelo argumento do item anterior. Pela fórmula de Taylor, para $\varepsilon \in I$ temos $P(h + \varepsilon) = P(h) + P'(h)\varepsilon$, pois $\varepsilon^2 = 0$. Tomando $\varepsilon = -P'(h)^{-1}P(h)$, obtemos $P(h + \varepsilon) = 0$, e $\bar{x} \mapsto h + \varepsilon$ define um levantamento de φ_0 (no estilo do método de Newton). Como B é de apresentação finita, B é suave sobre A . Pelo Exemplo 1.34, $\Omega_{B/A} = B dx/B P'(\bar{x})dx = 0$. Por exemplo, para $n \geq 1$, a $\mathbb{Z}[1/n]$ -álgebra $\mathbb{Z}[1/n][x]/(x^n - 1)$ é étale, pois $P' = nx^{n-1}$ e x é invertível. Da mesma forma, uma extensão finita separável de corpos L/K é étale (cf. [1, Teorema 25.3]), enquanto a extensão inseparável do Exemplo 1.36 não é suave (Exemplo 2.15).

Geometricamente, álgebras étale correspondem a “recobrimentos sem ramificação”. Tome $A = \mathbb{C}[t]$. A A -álgebra $\mathbb{C}[t][y]/(y^2 - 1)$ é étale, pois $P' = 2y$ é invertível (já que $y^2 = 1$): ela corresponde a duas cópias da reta, uma sobre a outra. Já $\mathbb{C}[t][y]/(y^2 - t)$ não é étale: $P' = 2y$ não é invertível, e as duas “folhas” $y = \pm\sqrt{t}$ se encontram sobre $t = 0$ (desenho dos pontos reais):



Exercício 2.22. Mostre que suavidade é estável por mudança de base: se A é uma R -álgebra suave e $R \rightarrow R'$ é um morfismo de anéis, então $R' \otimes_R A$ é uma R' -álgebra suave e, se A tem dimensão relativa constante d , o mesmo vale para $R' \otimes_R A$. Dica: se $A = R[x_1, \dots, x_m]/(f_1, \dots, f_n)$, então $R' \otimes_R A = R'[x_1, \dots, x_m]/(f_1, \dots, f_n)$; um morfismo de R' -álgebras $R' \otimes_R A \rightarrow S/I$ é o mesmo que um morfismo de R -álgebras $A \rightarrow S/I$; para a dimensão, use a Proposição 1.30.

Exemplo 2.23 (Suavidade e regularidade). O Teorema 2.14 permite relacionar a noção de suavidade com a noção de regularidade de um anel local. Para simplificar, consideremos apenas o caso em que $R = \mathbb{C}$ e que A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra

suave. Seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de A . Como A é de apresentação finita sobre $\mathbb{C}$, segue do Nullstellensatz que $A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$. Em particular, $A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$ é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave e temos portanto uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega_{\mathbb{C}/\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

Como $\Omega_{\mathbb{C}/\mathbb{C}} = 0$, concluímos que

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathbb{C} \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}} \cong \Omega_{A/\mathbb{C}}/\mathfrak{m}\Omega_{A/\mathbb{C}}.$$

Sejam $f_1, \dots, f_d \in \mathfrak{m}$ tais que $f_1 + \mathfrak{m}^2, \dots, f_d + \mathfrak{m}^2$ seja uma base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Pelo isomorfismo acima, $1 \otimes df_1, \dots, 1 \otimes df_d$ é uma base de $\mathbb{C} \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}}$. Segue do Lema de Nakayama que $df_1, \dots, df_d$ é uma base do $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo $\Omega_{A_{\mathfrak{m}}/\mathbb{C}}$. Usando o teorema da interseção de Krull, podemos deduzir então que as imagens de $f_1, \dots, f_d$ na localização $A_{\mathfrak{m}}$ formam uma sequência regular. Isto implica que $A_{\mathfrak{m}}$ é um anel local regular, de dimensão de Krull d , que coincide com a dimensão relativa de A sobre $\mathbb{C}$ em $\mathfrak{m}$.

Teorema 2.24 (Critério do jacobiano). *Seja A uma R -álgebra suave e $B = A/I$, para algum ideal finitamente gerado $I \subset A$. Então B é uma R -álgebra suave se e somente se, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de B , a sequência*

$$0 \longrightarrow B_{\mathfrak{m}} \otimes_B I/I^2 \longrightarrow B_{\mathfrak{m}} \otimes_A \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B_{\mathfrak{m}}/R} \longrightarrow 0 \quad (6)$$

é exata e admite uma cisão.

Observação 2.25. Como $B_{\mathfrak{m}}$ é local e $B_{\mathfrak{m}} \otimes_A \Omega_{A/R}$ é livre de posto finito, a condição do enunciado equivale a: a primeira aplicação em (6) é injetiva e $\Omega_{B_{\mathfrak{m}}/R}$ é um $B_{\mathfrak{m}}$ -módulo livre. A mera exatidão não basta: para $A = \mathbb{C}[x, y]$ e $I = (xy)$, a aplicação $I/I^2 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}}$ é injetiva, mas $B = \mathbb{C}[x, y]/(xy)$ não é suave (verifique!).

Demonstração. Note que B é de apresentação finita sobre R , pois A o é e I é finitamente gerado. Note também que (6) é a localização em $\mathfrak{m}$ da segunda sequência exata fundamental

$$I/I^2 \xrightarrow{\alpha} B \otimes_A \Omega_{A/R} \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow 0 \quad (7)$$

(localização é exata e comuta com Ω , pelo Corolário 1.27).

Se B é suave, então (7) é exata à esquerda e cinda pelo Teorema 2.14; logo o mesmo vale para suas localizações.

Reciprocamente, suponha que (6) seja exata e cinda para todo $\mathfrak{m}$. Então α é injetiva, pois um módulo cujas localizações em todos os ideais maximais são nulas é nulo (aplicado a $\ker \alpha$). Além disso, $\Omega_{B/R}$ é de apresentação finita (é o conúcleo de α , cujo domínio é finitamente gerado e cujo contradomínio é projetivo de tipo finito) e localmente livre; pelo Teorema 2.11, $\Omega_{B/R}$ é projetivo.

Logo, a sequência exata curta $0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow B \otimes_A \Omega_{A/R} \rightarrow \Omega_{B/R} \rightarrow 0$ cinde, e existe uma retração B -linear $r : B \otimes_A \Omega_{A/R} \rightarrow I/I^2$ de α .

Seja agora um diagrama de R -álgebras como na definição de suavidade, com $\varphi_0 : B \rightarrow S/J$ e $J^2 = 0$ (usamos a letra J para não confundir com I). Como A é suave, a composição $A \rightarrow B \rightarrow S/J$ admite um levantamento $\psi : A \rightarrow S$. Temos $\psi(I) \subset J$ e, como $J^2 = 0$, a restrição $\psi|_I$ se anula em I^2 e induz uma aplicação $\bar{\psi} : I/I^2 \rightarrow J$, que é B -linear (note que J é um S/J -módulo e, portanto, um B -módulo via φ_0). Considere a R -derivação

$$D : A \longrightarrow J, \quad f \longmapsto -\bar{\psi}(r(1 \otimes d_{A/R}f)).$$

Se $f \in I$, então $r(1 \otimes d_{A/R}f) = f + I^2$, logo $D(f) = -\psi(f)$. Como $J^2 = 0$, a aplicação $\psi' = \psi + D : A \rightarrow S$ é um morfismo de R -álgebras:

$$\psi'(fg) = \psi(f)\psi(g) + \psi(f)D(g) + \psi(g)D(f) = (\psi(f) + D(f))(\psi(g) + D(g)).$$

Por construção, ψ' se anula em I e induz portanto $\varphi : B \rightarrow S$, que é um levantamento de φ_0 , pois D toma valores em J . Isto mostra que B é suave. $\square$

Corolário 2.26. *Seja $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$, $I = (f_1, \dots, f_n)$, com $n \leq m$, e $B = A/I$. Se, para todo $z = (z_1, \dots, z_m)$ tal que $f_1(z) = \dots = f_n(z) = 0$, o posto da matriz jacobiana*

$$Jf(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(z) \end{pmatrix}$$

for igual a n , então B é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave de dimensão relativa $m - n$.

Demonstração. Pelo Nullstellensatz, os pontos z como no enunciado correspondem a ideais maximais de B (ou, equivalentemente, ideais maximais de A contendo I) via

$$z \longmapsto \mathfrak{m}_z = (x_1 - z_1, \dots, x_m - z_m).$$

Fixe um tal z e denote $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_z B$, de forma que $B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}} = \mathbb{C}$. O $B_{\mathfrak{m}}$ -módulo $L = B_{\mathfrak{m}} \otimes_A \Omega_{A/\mathbb{C}}$ é livre de base $dx_1, \dots, dx_m$, e a imagem de $f_i + I^2$ em L é

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m} dx_m.$$

Reduzindo módulo $\mathfrak{m}$, obtemos os vetores-linha da matriz $Jf(z)$ em $L/\mathfrak{m}L = \mathbb{C}^m$. Como estes são linearmente independentes, podemos completá-los com $m - n$ vetores da base canônica para obter uma base de $\mathbb{C}^m$. Pelo Lema de Nakayama, $df_1, \dots, df_n$ juntamente com os dx_j correspondentes geram L ; como L é livre de posto m , eles formam uma base de L (um sistema de m geradores de um módulo livre de posto m é uma base). Em particular, se $\sum_i b_i df_i = 0$ com $b_i \in B_{\mathfrak{m}}$, então $b_i = 0$ para todo i . Como $(I/I^2)_{\mathfrak{m}}$ é gerado pelas classes de $f_1, \dots, f_n$, segue que a aplicação $(I/I^2)_{\mathfrak{m}} \rightarrow L$ é injetiva, com imagem $\bigoplus_i B_{\mathfrak{m}} df_i$,

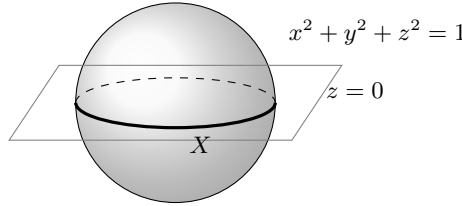
que é um fator direto de L com complementar livre de posto $m - n$. Assim, a sequência (6) é exata e cinde, e $\Omega_{B_m/\mathbb{C}} \cong B_m^{\oplus(m-n)}$. Pelo Teorema 2.24, B é suave, e sua dimensão relativa em cada ideal maximal é $m - n$. (Se nenhum z existe, então $B = 0$ pelo Nullstellensatz, e o enunciado é vazio.) $\square$

Exemplo 2.27. Seja $B = \mathbb{C}[x, y]/(P)$, onde $P = y^2 - x^3 - x$ (curva elíptica afim). O gradiente de P é $(-3x^2 - 1, 2y)$. Se ele se anulasse num ponto (z, w) tal que $P(z, w) = 0$, teríamos $w = 0$ e $3z^2 = -1$, donde $z^3 + z = z(z^2 + 1) = \frac{2}{3}z \neq 0$, uma contradição. Logo B é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave de dimensão relativa 1. Por outro lado, a cúspide $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ não satisfaz a hipótese do corolário no ponto $(0, 0)$.

Vejam agora um exemplo com duas equações. Sejam $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e $f_2 = z$ em $\mathbb{C}[x, y, z]$, cuja matriz jacobiana é

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ satisfaz $f_1(a) = f_2(a) = 0$, então $a_3 = 0$ e $a_1^2 + a_2^2 = 1$; em particular, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, e a matriz jacobiana tem posto 2 em a . Segue do corolário que $\mathbb{C}[x, y, z]/(f_1, f_2)$ é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave de dimensão relativa $3 - 2 = 1$. Geometricamente, trata-se da interseção de uma esfera com um plano, que é um círculo (desenho dos pontos reais):



Observação 2.28 (Projetivo, mas não livre). Se A é suave, então $\Omega_{A/R}$ é projetivo (Teorema 2.16), mas não necessariamente livre. Um exemplo clássico é a esfera: $R = \mathbb{R}$ e $A = \mathbb{R}[x, y, z]/(P)$, com $P = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Pelo Exemplo 1.34,

$$\Omega_{A/\mathbb{R}} \cong \frac{A dx \oplus A dy \oplus A dz}{A dP}, \quad dP = 2\theta, \quad \theta = x dx + y dy + z dz.$$

Considere a aplicação A -linear

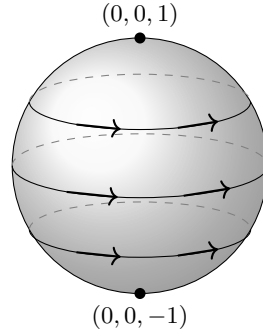
$$\lambda : A dx \oplus A dy \oplus A dz \longrightarrow A, \quad a dx + b dy + c dz \longmapsto ax + by + cz.$$

Como $\lambda(\theta) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, temos $A dx \oplus A dy \oplus A dz = A\theta \oplus \ker \lambda$, logo

$$\Omega_{A/\mathbb{R}} \cong \ker \lambda, \quad \Omega_{A/\mathbb{R}} \oplus A \cong A^{\oplus 3}.$$

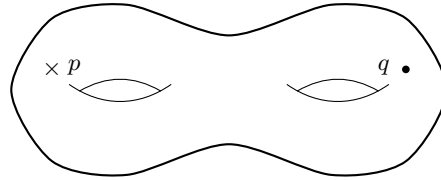
Em particular, $\Omega_{A/\mathbb{R}}$ é projetivo. (O mesmo cálculo mostra, pelo critério do jacobiano, que A é suave: a imagem de $(P)/(P^2) \cong A$ é $A\theta$, que é livre e é um fator direto.)

Suponha que $\Omega_{A/\mathbb{R}}$ fosse livre; como A é um domínio, seu posto seria 2 (calcule-o no corpo de frações). Seja ω_1, ω_2 uma base e $D_1, D_2 \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ a base dual (Corolário 1.16). Toda $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(A)$ define um campo vetorial contínuo na esfera $S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : P(p) = 0\}$, a saber $p \mapsto (D(x)(p), D(y)(p), D(z)(p))$, que é tangente a S^2 , pois $0 = D(P) = 2(xD(x) + yD(y) + zD(z))$. Escrevendo $\omega_1 = a dx + b dy + c dz$, temos $1 = \omega_1(D_1) = aD_1(x) + bD_1(y) + cD_1(z)$, de forma que o campo associado a D_1 não se anula em nenhum ponto de S^2 . Isto contradiz o teorema da bola cabeluda, segundo o qual todo campo vetorial tangente contínuo em S^2 se anula em algum ponto. Por exemplo, a derivação $D = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ (bem definida em A , pois $D(P) = 0$) corresponde ao campo de rotação em torno do eixo vertical, que se anula nos dois polos:



Portanto $\Omega_{A/\mathbb{R}}$ é projetivo, mas não é livre.

Sobre $\mathbb{C}$, já há exemplos entre as curvas algébricas. Seja $f \in \mathbb{C}[x]$ um polinômio de grau 6 sem raízes múltiplas. Como no caso da curva elíptica (Observação 1.41), a curva algébrica $y^2 = f(x)$ se completa a uma superfície compacta (topologicamente, um toro com dois buracos) acrescentando pontos no infinito; neste caso, são dois pontos, p e q . Seja X a curva obtida acrescentando apenas o ponto q ; ela é a superfície compacta menos o ponto p :



Pode-se mostrar que X também é definida por equações polinomiais e que seu anel de funções A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave de dimensão relativa 1. Usando a teoria das curvas algébricas compactas (veja [4, Cap. IV]), mostra-se que $\Omega_{A/\mathbb{C}}$ não é livre. Eis o esboço do argumento. Se $\Omega_{A/\mathbb{C}}$ fosse livre, um gerador η seria uma 1-forma que não se anula em nenhum ponto de X ; na curva compacta, ela só pode ter zeros ou polos em p . Por outro lado, numa curva compacta como esta, o número de zeros menos o número de polos de uma 1-forma (contados com

multiplicidade) é sempre igual a 2; logo η tem um zero duplo em p . Como dx/y tem exatamente dois zeros simples, em p e em q , o quociente $\eta/(dx/y)$ seria uma função na curva compacta com um zero simples em p e um único polo, simples, em q . Uma curva compacta que admite tal função é necessariamente a esfera de Riemann, o que não é o caso aqui.

Aula 3

Cohomologia de de Rham

Na geometria diferencial, as formas diferenciais de grau qualquer formam um complexo, o *complexo de de Rham*, cuja cohomologia mede a diferença entre formas *fechadas* ($d\omega = 0$) e formas *exatas* ($\omega = d\eta$). Por exemplo, em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, a 1-forma $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ é fechada mas não é exata, e isto reflete o fato que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tem um “buraco”. O teorema de de Rham afirma que esta cohomologia é um invariante topológico.

Nesta aula, construímos uma versão puramente algébrica do complexo de de Rham para uma R -álgebra A qualquer. Para isso, precisamos primeiro de formas diferenciais de grau $k \geq 2$, que obtemos a partir de $\Omega_{A/R}$ pela construção da *potência exterior*. Veremos, em vários exemplos, que a cohomologia de de Rham algébrica de uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave é de dimensão finita, embora as formas diferenciais formem espaços vetoriais de dimensão infinita. O teorema de comparação de Grothendieck, com o qual encerramos estas notas, explica este fenômeno: ela coincide com a cohomologia (singular) do espaço topológico correspondente.

Seja A um anel, M um A -módulo e $k \in \mathbb{N}$. Se $k \geq 2$, lembremos que a k -ésima potência tensorial $M^{\otimes k}$ é um A -módulo cujos elementos são combinações A -lineares de “tensores decomponíveis”

$$s_1 \otimes \cdots \otimes s_k, \quad s_i \in M, \quad (8)$$

onde o símbolo $\otimes$ na expressão acima satisfaz as relações de A -multilinearidade: se $s_i = s'_i + cs''_i$, com $c \in A$ e $s'_i, s''_i \in M$, então

$$s_1 \otimes \cdots \otimes s_k = (s_1 \otimes \cdots \otimes s'_i \otimes \cdots \otimes s_k) + c(s_1 \otimes \cdots \otimes s''_i \otimes \cdots \otimes s_k).$$

Se $k \in \{0, 1\}$, temos simplesmente $M^{\otimes 0} = A$ e $M^{\otimes 1} = M$.

Definição 3.1. A k -ésima *potência exterior* de M é o A -módulo quociente

$$\bigwedge^k M = M^{\otimes k} / K_k,$$

onde K_k é o A -submódulo de $M^{\otimes k}$ gerado por todos os tensores decomponíveis (8) tais que $s_i = s_j$ para alguns $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distintos.

Note que $\bigwedge^0 M = A$ e $\bigwedge^1 M = M$. Se $k \geq 2$, a classe de um tensor decomponível (8) em $\bigwedge^k M$ é denotada

$$s_1 \wedge \cdots \wedge s_k.$$

O símbolo $\wedge$ se lê “*produto wedge*”. Por definição, além das relações de A -multilinearidade, o produto wedge é tal que $s_1 \wedge \cdots \wedge s_k = 0$ se existem $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distintos tais que $s_i = s_j$. A partir desta propriedade, podemos demonstrar o lema seguinte.

Lema 3.2. Se σ é uma permutação de $\{1, \dots, k\}$, então

$$s_{\sigma 1} \wedge \dots \wedge s_{\sigma k} = \text{sgn}(\sigma) s_1 \wedge \dots \wedge s_k,$$

onde $\text{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ é o sinal de σ .

Demonstração. Como toda permutação se escreve como um produto de transposições e o sinal é um morfismo de grupos, podemos supor que σ é uma transposição. Para simplificar, vamos supor $k = 2$; o caso geral é igual, mas com mais índices. Assim, queremos mostrar que

$$s_1 \wedge s_2 = -s_2 \wedge s_1.$$

Por definição, temos por um lado

$$(s_1 + s_2) \wedge (s_1 + s_2) = 0.$$

Por outro lado, usando as relações de multilinearidade, e a definição de novo, obtemos

$$(s_1 + s_2) \wedge (s_1 + s_2) = s_1 \wedge s_1 + s_1 \wedge s_2 + s_2 \wedge s_1 + s_2 \wedge s_2 = s_1 \wedge s_2 + s_2 \wedge s_1 \quad \square$$

Observação 3.3 (Propriedade universal). Seja N um A -módulo. Dizemos que uma aplicação $\beta : M^k = M \times \dots \times M \rightarrow N$ é *multilinear alternada* se é A -linear em cada variável e $\beta(s_1, \dots, s_k) = 0$ sempre que $s_i = s_j$ para alguns $i \neq j$. Segue da propriedade universal do produto tensorial e da definição de $\bigwedge^k M$ que a aplicação

$$\text{Hom}_A \left(\bigwedge^k M, N \right) \longrightarrow \{ \beta : M^k \rightarrow N \text{ multilinear alternada} \}$$

que associa a ρ a aplicação multilinear alternada $(s_1, \dots, s_k) \mapsto \rho(s_1 \wedge \dots \wedge s_k)$, é uma bijeção. Em particular, toda aplicação A -linear $u : M \rightarrow N$ induz uma aplicação A -linear

$$\bigwedge^k u : \bigwedge^k M \longrightarrow \bigwedge^k N, \quad s_1 \wedge \dots \wedge s_k \longmapsto u(s_1) \wedge \dots \wedge u(s_k),$$

e temos $\bigwedge^k (v \circ u) = \bigwedge^k v \circ \bigwedge^k u$ e $\bigwedge^k \text{id}_M = \text{id}_{\bigwedge^k M}$.

Proposição 3.4. Seja M um A -módulo livre de posto n . Se $0 \leq k \leq n$, então $\bigwedge^k M$ é um A -módulo livre de posto $\binom{n}{k}$. Mais precisamente, se $e_1, \dots, e_n$ é uma base de M , então

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

é uma base de $\bigwedge^k M$. Se $k > n$, então $\bigwedge^k M = 0$.

Demonstração. Por multilinearidade, $\bigwedge^k M$ é gerado pelos elementos $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$, com $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ arbitrários. Se dois índices j_a coincidem, este elemento é nulo; caso contrário, pelo lema anterior, ele é igual, a menos de sinal, a $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, onde $i_1 < \cdots < i_k$ é o reordenamento dos j_a . Isto mostra que os elementos do enunciado geram $\bigwedge^k M$ e que $\bigwedge^k M = 0$ se $k > n$ (neste caso há sempre índices repetidos).

Para a independência linear, sejam $e_1^*, \dots, e_n^* \in M^\vee$ as coordenadas com respeito à base $e_1, \dots, e_n$. Para cada $I = (i_1 < \cdots < i_k)$, a aplicação

$$\beta_I : M^k \longrightarrow A, \quad (s_1, \dots, s_k) \longmapsto \det(e_{i_a}^*(s_b))_{1 \leq a, b \leq k}$$

é multilinear alternada (um determinante com duas colunas iguais é nulo). Pela Observação 3.3, ela induz $\rho_I : \bigwedge^k M \rightarrow A$ tal que $\rho_I(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}) = 1$ se $(j_1, \dots, j_k) = I$ e $= 0$ se $(j_1 < \cdots < j_k) \neq I$. Assim, se $\sum_J c_J e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} = 0$, aplicando ρ_I obtemos $c_I = 0$. $\square$

Exemplo 3.5. Se $M = Ae_1 \oplus Ae_2$, então $\bigwedge^0 M = A$, $\bigwedge^1 M = Ae_1 \oplus Ae_2$ e $\bigwedge^2 M = Ae_1 \wedge e_2$.

Exercício 3.6. Mostre que se M é um A -módulo gerado por n elementos, então $\bigwedge^k M = 0$ para todo $k > n$. Dica: se $s_1, \dots, s_n$ geram M , então $\bigwedge^k M$ é gerado pelos $s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_k}$, e algum índice se repete.

Exercício 3.7. Se M e M' são A -módulos, mostre que

$$\bigwedge^k (M \oplus M') \cong \bigoplus_{i+j=k} \bigwedge^i M \otimes_A \bigwedge^j M'.$$

Use este isomorfismo para dar uma outra demonstração da Proposição 3.4. Dica: a aplicação da direita para a esquerda é induzida por $(s_1 \wedge \cdots \wedge s_i) \otimes (t_1 \wedge \cdots \wedge t_j) \mapsto s_1 \wedge \cdots \wedge s_i \wedge t_1 \wedge \cdots \wedge t_j$; para a inversa, use a Observação 3.3.

Proposição 3.8. Se M é um A -módulo e B é uma A -álgebra, então $B \otimes_A \bigwedge^k M \cong \bigwedge^k (B \otimes_A M)$, onde a potência exterior à direita é tomada no sentido de B -módulos.

Demonstração. Denotemos $M_B = B \otimes_A M$. A aplicação $M^k \rightarrow \bigwedge^k M_B$, $(s_1, \dots, s_k) \mapsto (1 \otimes s_1) \wedge \cdots \wedge (1 \otimes s_k)$ é A -multilinear alternada, logo induz uma aplicação A -linear $\bigwedge^k M \rightarrow \bigwedge^k M_B$ e, portanto, uma aplicação B -linear

$$\alpha : B \otimes_A \bigwedge^k M \longrightarrow \bigwedge^k M_B, \quad b \otimes (s_1 \wedge \cdots \wedge s_k) \longmapsto b(1 \otimes s_1) \wedge \cdots \wedge (1 \otimes s_k).$$

Na direção oposta, fixados $x_2, \dots, x_k \in M$ e $b_2, \dots, b_k \in B$, a aplicação $B \times M \rightarrow B \otimes_A \bigwedge^k M$, $(b_1, x_1) \mapsto b_1 \cdots b_k \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_k)$ é A -bilinear, e o mesmo vale em cada variável. Obtemos assim uma aplicação B -multilinear

$$\beta : M_B^k \longrightarrow B \otimes_A \bigwedge^k M, \quad (b_1 \otimes x_1, \dots, b_k \otimes x_k) \longmapsto b_1 \cdots b_k \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_k).$$

Ela é alternada: se $y = \sum_l c_l \otimes z_l$ aparece nas posições i e j , então, expandindo, os termos com (l, l') e (l', l) nessas posições se cancelam pelo lema anterior, e os termos com $l = l'$ são nulos. Pela Observação 3.3, β induz uma aplicação B -linear $\bigwedge^k M_B \rightarrow B \otimes_A \bigwedge^k M$, que é claramente inversa de α (basta verificar nos geradores). $\square$

Corolário 3.9. *Seja M um A -módulo projetivo de apresentação finita. Para todo $k \geq 0$, $\bigwedge^k M$ é um A -módulo projetivo de apresentação finita. Se n é o posto de M e $0 \leq k \leq n$, então $\binom{n}{k}$ é o posto de $\bigwedge^k M$; se $k > n$, então $\bigwedge^k M = 0$.*

Demonstração. Como M é projetivo e finitamente gerado, existe um módulo livre de posto finito $F = A^{\oplus N}$ e aplicações A -lineares $i : M \rightarrow F$, $p : F \rightarrow M$ tais que $p \circ i = \text{id}_M$ (tome uma sobrejeção $F \rightarrow M$ e uma seção). Pela funtorialidade da Observação 3.3, $\bigwedge^k p \circ \bigwedge^k i = \text{id}$, de forma que $\bigwedge^k M$ é um fator direto de $\bigwedge^k F$, que é livre de posto finito pela Proposição 3.4. Logo, $\bigwedge^k M$ é projetivo e finitamente gerado e, sendo um fator direto de um módulo livre de posto finito, de apresentação finita (o núcleo de $\bigwedge^k F \rightarrow \bigwedge^k M$ é o outro fator direto, que é finitamente gerado). Finalmente, se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo, a Proposição 3.8 com $B = A_{\mathfrak{p}}$ dá

$$\left(\bigwedge^k M \right)_{\mathfrak{p}} \cong \bigwedge^k (M_{\mathfrak{p}}) \cong \bigwedge^k (A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n}),$$

que é livre de posto $\binom{n}{k}$ (nulo se $k > n$). Um módulo cujas localizações são todas nulas é nulo, o que prova a última afirmação. $\square$

Observação 3.10 (Produto exterior). Dados $k, l \geq 0$, existe uma única aplicação A -bilinear

$$\bigwedge^k M \times \bigwedge^l M \longrightarrow \bigwedge^{k+l} M, \quad (\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta$$

tal que $(s_1 \wedge \cdots \wedge s_k) \wedge (t_1 \wedge \cdots \wedge t_l) = s_1 \wedge \cdots \wedge s_k \wedge t_1 \wedge \cdots \wedge t_l$ (aplique a Observação 3.3 duas vezes). Este produto é associativo e satisfaz

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta, \quad \omega \in \bigwedge^k M, \quad \eta \in \bigwedge^l M$$

(exercício). Em particular, elementos de grau par comutam com todos os outros.

Suponha agora que A seja uma R -álgebra e apliquemos a construção acima ao módulo de diferenciais.

Definição 3.11. Para todo $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\Omega_{A/R}^k = \bigwedge^k \Omega_{A/R}.$$

Os elementos de $\Omega_{A/R}^k$ são chamados de k -formas diferenciais de A sobre R .

Note que $\Omega_{A/R}^0 = A$ e $\Omega_{A/R}^1 = \Omega_{A/R}$. Como $\Omega_{A/R}$ é gerado como A -módulo pelos df , $f \in A$, o A -módulo $\Omega_{A/R}^k$ é gerado pelos elementos $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$; equivalentemente, $\Omega_{A/R}^k$ é gerado como R -módulo pelos elementos $g df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$, com $g, f_1, \dots, f_k \in A$.

Exemplo 3.12. Seja $A = R[x_1, \dots, x_m]$. Como $\Omega_{A/R}^1$ é um módulo livre de posto m , então, para todo $0 \leq k \leq m$, $\Omega_{A/R}^k$ é um módulo livre de posto $\binom{m}{k}$, de base

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m.$$

Se $k > m$, então $\Omega_{A/R}^k = 0$. Por exemplo, se $A = R[x, y]$, então

$$\Omega_{A/R}^0 = A, \quad \Omega_{A/R}^1 = A dx \oplus A dy, \quad \Omega_{A/R}^2 = A dx \wedge dy.$$

Exemplo 3.13. Seja $R = \mathbb{C}$ e A uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave da forma $A = \mathbb{C}[x, y]/(P)$, onde P é não-constante. Pelo Teorema 2.16 e pela demonstração do Corolário 2.26, $\Omega_{A/\mathbb{C}}$ é um A -módulo projetivo de posto 1. Logo, pelo Corolário 3.9, $\Omega_{A/\mathbb{C}}^k = 0$ para todo $k > 1$. Mais geralmente, se A é uma R -álgebra suave de dimensão relativa d , então $\Omega_{A/R}^k = 0$ para todo $k > d$.

Como $\Omega_{A/R}^0 = A$ e $\Omega_{A/R}^1 = \Omega_{A/R}$, a derivada exterior é uma aplicação R -linear

$$d_{A/R} : \Omega_{A/R}^0 \longrightarrow \Omega_{A/R}^1.$$

O próximo teorema diz que ela se estende, de maneira canônica, a todas as k -formas.

Teorema 3.14. *Seja A uma R -álgebra. Existe uma única família de aplicações R -lineares*

$$d^k : \Omega_{A/R}^k \longrightarrow \Omega_{A/R}^{k+1}, \quad k \geq 0,$$

com $d^0 = d_{A/R}$, tal que

$$(i) \quad d^k \circ d^{k-1} = 0 \text{ para todo } k \geq 1;$$

$$(ii) \quad d^{k+1}(\omega \wedge \eta) = d^k \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d^l \eta \text{ para todos } \omega \in \Omega_{A/R}^k \text{ e } \eta \in \Omega_{A/R}^l.$$

Explicitamente, para todos $g, f_1, \dots, f_k \in A$,

$$d^k(g df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = dg \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k. \quad (9)$$

Demonstração. Unicidade. Suponha que uma tal família exista. Por (ii) e (i), $d^k(df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = \sum_i \pm df_1 \wedge \cdots \wedge d^1(df_i) \wedge \cdots \wedge df_k = 0$, pois $d^1(df_i) = d^1(d^0 f_i) = 0$. Usando (ii) mais uma vez, obtemos (9). Como os elementos $g df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$ geram $\Omega_{A/R}^k$ como R -módulo, d^k fica determinada.

Existência de d^1 . Lembremos da demonstração do Teorema 1.13 que $\Omega_{A/R}$ é o quociente do A -módulo livre gerado pelos símbolos x_f pelas relações de R -linearidade e de Leibniz. Equivalentemente, $\Omega_{A/R}$ é o quociente do R -módulo $A \otimes_R A$ (onde $g \otimes f$ corresponde a $g df$) pelo R -submódulo gerado pelos elementos

$g \otimes f f' - g f \otimes f' - g f' \otimes f$. A aplicação R -linear $A \otimes_R A \rightarrow \Omega_{A/R}^2$, $g \otimes f \mapsto dg \wedge df$, se anula nestes elementos:

$$dg \wedge d(f f') - d(g f) \wedge df' - d(g f') \wedge df = -g (df \wedge df' + df' \wedge df) = 0.$$

Logo, existe uma aplicação R -linear $d^1 : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow \Omega_{A/R}^2$ satisfazendo $d^1(g df) = dg \wedge df$. Note que $d^1(df) = d^1(1 \cdot df) = d(1) \wedge df = 0$ e que $d^1(h\omega) = dh \wedge \omega + h d^1\omega$ para $h \in A$ e $\omega \in \Omega_{A/R}^1$ (basta verificar para $\omega = g df$).

Existência de d^k , $k \geq 2$. Considere a aplicação R -multilinear

$$F : (\Omega_{A/R}^1)^k \longrightarrow \Omega_{A/R}^{k+1}, \quad F(\omega_1, \dots, \omega_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \dots \wedge d^1 \omega_i \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

Se $h \in A$, então, usando $d^1(h\omega_i) = dh \wedge \omega_i + h d^1\omega_i$ e movendo a 1-forma dh para a esquerda através de $\omega_1, \dots, \omega_{i-1}$, obtemos

$$F(\omega_1, \dots, h\omega_i, \dots, \omega_k) = h F(\omega_1, \dots, \omega_k) + dh \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k,$$

que não depende de i . Logo, F induz uma aplicação R -linear no produto tensorial $(\Omega_{A/R}^1)^{\otimes_A k}$. Ela se anula nos tensores com $\omega_i = \omega_j = \theta$ para $i < j$: os termos de índice diferente de i e j contêm θ duas vezes, e os termos de índice i e j são, respectivamente, $(-1)^{i+1}(-1)^{j-i-1}X$ e $(-1)^{j+1}X$, onde X é obtido de $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ substituindo $\omega_i \wedge \dots \wedge \omega_j$ por $d^1\theta \wedge \theta \wedge \omega_{i+1} \wedge \dots \wedge \omega_{j-1}$ (use que a 2-forma $d^1\theta$ comuta com tudo). A soma é nula. Assim, F induz $d^k : \Omega_{A/R}^k \rightarrow \Omega_{A/R}^{k+1}$ com

$$d^k(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \dots \wedge d^1 \omega_i \wedge \dots \wedge \omega_k.$$

Tomando $\omega_1 = g df_1$ e $\omega_i = df_i$ para $i \geq 2$, obtemos (9).

Propriedades (i) e (ii). Por (9), $d^k(d^{k-1}(g df_1 \wedge \dots \wedge df_{k-1})) = d^k(1 \cdot dg \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_{k-1}) = d(1) \wedge \dots = 0$. Para (ii), por bilinearidade basta considerar $\omega = g df_1 \wedge \dots \wedge df_k$ e $\eta = h dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l$. Então $\omega \wedge \eta = gh df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l$ e

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= (h dg + g dh) \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k g df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge dh \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_l \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned} \quad \square$$

Por abuso de notação, escrevemos simplesmente $d = d^k$ para todo k .

Exemplo 3.15. Seja $A = R[x, y]$ e $\omega = F dx + G dy$, com $F, G \in A$. Então

$$\begin{aligned} d\omega &= dF \wedge dx + dG \wedge dy = \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Reconhecemos aqui o rotacional do cálculo vetorial (ou o integrando do teorema de Green).

Exercício 3.16. Seja $R = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}(x, y)$ e

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \in \Omega_{A/\mathbb{C}}^1.$$

Calcule $d\omega$. Existe $f \in A$ tal que $\omega = df$? Dica: fator $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$.

Pelo Teorema 3.14, obtemos um *complexo* de R -módulos (isto é, uma sequência de aplicações R -lineares em que a composição de duas aplicações consecutivas é nula), chamado de *complexo de de Rham* de A sobre R :

$$\Omega_{A/R}^\bullet : \quad A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{A/R}^2 \xrightarrow{d} \Omega_{A/R}^3 \xrightarrow{d} \cdots$$

Dizemos que $\omega \in \Omega_{A/R}^k$ é *fechada* se $d\omega = 0$, e *exata* se $\omega = d\eta$ para algum $\eta \in \Omega_{A/R}^{k-1}$ (para $k = 1$, isto coincide com a definição da Aula 1). Como $d \circ d = 0$, toda forma exata é fechada.

Definição 3.17. A k -ésima *cohomologia de de Rham* de A sobre R é o R -módulo

$$H_{\text{dR}}^k(A/R) = H^k(\Omega_{A/R}^\bullet) = \frac{\ker(d : \Omega_{A/R}^k \rightarrow \Omega_{A/R}^{k+1})}{\text{im}(d : \Omega_{A/R}^{k-1} \rightarrow \Omega_{A/R}^k)} = \frac{\{k\text{-formas fechadas}\}}{\{k\text{-formas exatas}\}},$$

com a convenção $\Omega_{A/R}^{-1} = 0$. Em particular, $H_{\text{dR}}^0(A/R) = \ker(d : A \rightarrow \Omega_{A/R}^1)$.

Note que $H_{\text{dR}}^k(A/R)$ é apenas um R -módulo, e não um A -módulo, pois d não é A -linear.

Exemplo 3.18. Seja $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x]$. O complexo de de Rham é

$$\mathbb{C}[x] \xrightarrow{d} \mathbb{C}[x] dx \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad f \longmapsto \frac{df}{dx} dx.$$

Temos $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{C}[x]/\mathbb{C}) = \ker(d) = \mathbb{C}$ e $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{C}[x]/\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x] dx / \text{im}(d) = 0$, pois, dado $g = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$, o polinômio

$$f = c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

satisfaz $df = g dx$. Finalmente, $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{C}[x]/\mathbb{C}) = 0$ para todo $k \geq 2$, pois $\Omega_{\mathbb{C}[x]/\mathbb{C}}^k = 0$.

Exercício 3.19. Calcule $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{F}_p[x]/\mathbb{F}_p)$ e $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{F}_p[x]/\mathbb{F}_p)$. Dica: quais monômios x^n são fechados? Quais 1-formas $x^n dx$ são exatas?

Exercício 3.20. Seja $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$. Mostre que $H_{\text{dR}}^0(A/\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ e que $H_{\text{dR}}^k(A/\mathbb{C}) = 0$ para todo $k \geq 1$ (*lema de Poincaré algébrico*). Dica: considere a contração $\iota : \Omega_{A/\mathbb{C}}^k \rightarrow \Omega_{A/\mathbb{C}}^{k-1}$ pelo campo de Euler $E = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, dada por $\iota(g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \sum_j (-1)^{j+1} g x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, e mostre que $d\iota + \iota d$ multiplica $x^a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ por $|a| + k$ (“fórmula de Cartan”).

Exemplo 3.21. Seja $R = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ (note que $A \cong \mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$). Vimos que $\Omega_{A/\mathbb{C}}^1 = A dx$, e o complexo de de Rham é

$$A \xrightarrow{d} A dx \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \quad \sum_i c_i x^i \mapsto \left(\sum_i i c_i x^{i-1} \right) dx,$$

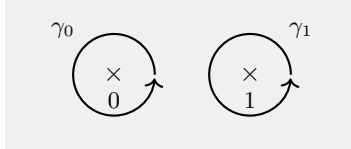
onde os índices i podem ser negativos. Assim, $H_{\text{dR}}^0(A/\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Toda 1-forma $x^i dx$ com $i \neq -1$ é exata (é igual a $d(x^{i+1}/(i+1))$), enquanto dx/x não é exata, pois nenhum $d(x^i)$ tem componente não-nula em $x^{-1} dx$. Portanto,

$$H_{\text{dR}}^1(A/\mathbb{C}) = \mathbb{C} \frac{dx}{x}, \quad H_{\text{dR}}^k(A/\mathbb{C}) = 0 \quad \text{para todo } k \geq 2.$$

Exercício 3.22. Mostre que

$$H_{\text{dR}}^1(\mathbb{C}[x, x^{-1}, (x-1)^{-1}]/\mathbb{C}) = \mathbb{C} \frac{dx}{x} \oplus \mathbb{C} \frac{dx}{x-1}.$$

Dica: use frações parciais. Geometricamente, $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tem dois “buracos”, e os laços γ_0 e γ_1 abaixo satisfazem $\int_{\gamma_0} \frac{dx}{x} = \int_{\gamma_1} \frac{dx}{x-1} = 2\pi i$ e $\int_{\gamma_0} \frac{dx}{x-1} = \int_{\gamma_1} \frac{dx}{x} = 0$ (compare com o teorema de Grothendieck, mais adiante):



Exemplo 3.23 (Curva elíptica afim). Seja $R = \mathbb{C}$, $Q = x^3 + x$ e $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - Q)$. Vimos no Exemplo 1.39 que $\Omega_{A/\mathbb{C}}^1 = A\omega$ é livre de posto 1, onde

$$\omega = Fy dx + 2G dy, \quad FQ + GQ' = 1,$$

e que $dx = y\omega$ e $dy = \frac{Q'}{2}\omega$ (“ $\omega = dx/y$ ”). Como A é um $\mathbb{C}[x]$ -módulo livre de base $1, y$, temos

$$\Omega_{A/\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C}[x]\omega \oplus \mathbb{C}[x]y\omega.$$

Todo $f \in A$ se escreve de maneira única como $f = g + hy$, com $g, h \in \mathbb{C}[x]$, e

$$df = g' dx + h'y dx + h dy = \left(Qh' + \frac{Q'}{2}h \right) \omega + g' y \omega, \quad (10)$$

onde usamos $y^2 = Q$.

Cálculo de H^0 . Se $df = 0$, então $g' = 0$ e $Qh' + \frac{Q'}{2}h = 0$. Se $h = c_n x^n + \dots$ com $c_n \neq 0$, então

$$\begin{aligned} Qh' + \frac{Q'}{2}h &= (x^3 + \dots)(nc_n x^{n-1} + \dots) + \frac{(3x^2 + 1)(c_n x^n + \dots)}{2} \\ &= \left(n + \frac{3}{2}\right) c_n x^{n+2} + \dots \neq 0, \end{aligned}$$

pois $n + \frac{3}{2} \neq 0$. Logo $h = 0$, $g \in \mathbb{C}$ e $H_{\text{dR}}^0(A/\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Cálculo de H^1 . Seja $\eta = (u + vy)\omega$, com $u, v \in \mathbb{C}[x]$. Tomando $h = 0$ e g uma primitiva de v em (10), vemos que $vy\omega = dg$ é exata. Assim, $\eta \equiv u\omega$ módulo formas exatas. Agora, tomando $g = 0$ e $h = x^n$ em (10), obtemos

$$d(x^n y) = \left(\left(n + \frac{3}{2}\right) x^{n+2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) x^n \right) \omega,$$

de forma que $x^{n+2}\omega \equiv -\frac{2n+1}{2n+3} x^n \omega$ módulo formas exatas, para todo $n \geq 0$. Por indução no grau de u , concluímos que $\eta \equiv (c_0 + c_1 x)\omega$ para alguns $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$. Finalmente, ω e $x\omega$ são linearmente independentes em H_{dR}^1 : se $(c_0 + c_1 x)\omega = df$, então, por (10), $g' = 0$ e $Qh' + \frac{Q'}{2}h = c_0 + c_1 x$; se $h \neq 0$, o lado esquerdo tem grau ≥ 2 pelo cálculo acima, uma contradição; logo $h = 0$ e $c_0 = c_1 = 0$. Portanto,

$$H_{\text{dR}}^1(A/\mathbb{C}) = \mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}x\omega, \quad H_{\text{dR}}^k(A/\mathbb{C}) = 0 \quad \text{para todo } k \geq 2.$$

Observação 3.24. Em todos os exemplos acima sobre $\mathbb{C}$, a cohomologia de de Rham é de dimensão finita, embora os $\mathbb{C}$ -espaços vetoriais $\Omega_{A/\mathbb{C}}^k$ sejam de dimensão infinita. Por outro lado, em característica $p > 0$, a cohomologia de de Rham de $\mathbb{F}_p[x]$ é de dimensão infinita. O teorema de Grothendieck, discutido a seguir, explica a finitude em característica zero.

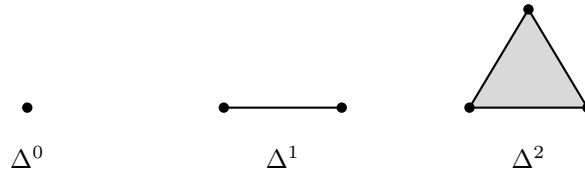
Teorema de Grothendieck

Para terminar, sem demonstrações, explicamos como a cohomologia de de Rham algébrica se relaciona com a topologia. Começamos relembrando brevemente a *homologia singular*, que associa a cada espaço topológico X e a cada $n \geq 0$ um grupo abeliano $H_n(X, \mathbb{Z})$ (veja, por exemplo, [7]).

Para $n \geq 0$, o *n-simplexo padrão* é

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0 + \dots + t_n = 1, t_i \geq 0\}.$$

Assim, Δ^0 é um ponto, Δ^1 é um segmento, Δ^2 é um triângulo, Δ^3 é um tetraedro, etc.



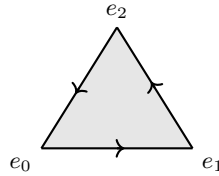
Para $0 \leq i \leq n$, seja $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ a inclusão da face oposta ao i -ésimo vértice, $(t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$. Um n -simplexo singular em X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Definimos o grupo abeliano livre

$$C_n(X) = \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z} \sigma$$

e o operador bordo $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ por

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i,$$

isto é, uma soma alternada das restrições de σ às faces de Δ^n . Por exemplo, se $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ é um caminho, então $\partial \sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$ (diferença formal entre ponto final e ponto inicial) e, se $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$, então $\partial \sigma$ é a soma, com sinais, dos três lados do triângulo, percorridos de forma a dar uma volta completa:



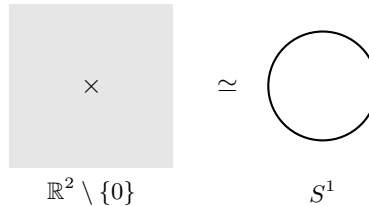
Verifica-se que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, de forma que obtemos o *complexo singular*

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0.$$

Definição 3.25. O n -ésimo grupo de homologia singular de X é

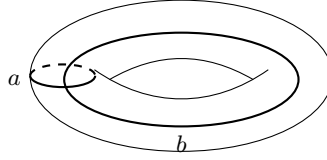
$$H_n(X, \mathbb{Z}) = \frac{\ker(\partial_n)}{\text{im}(\partial_{n+1})} = \frac{\{\text{ciclos}\}}{\{\text{bordos}\}}.$$

A homologia singular é um invariante puramente topológico; mais ainda, é invariante por homotopia: se X e Y são homotopicamente equivalentes, então $H_n(X, \mathbb{Z}) \cong H_n(Y, \mathbb{Z})$ para todo n . Por exemplo, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é homotopicamente equivalente ao círculo S^1 , logo ambos têm a mesma homologia.



Exemplo 3.26. Temos:

1. $H_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{Z}) = 0$ (de fato, $H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{Z}) = 0$ para todo $n \geq 1$, pois $\mathbb{R}^m$ é contrátil);
2. $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \cong H_1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, gerado pela classe de um laço que dá uma volta em torno da origem;
3. $H_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, onde $T = S^1 \times S^1$ é o toro, gerado pelas classes do “meridiano” a e do “paralelo” b :



Seja agora $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/(P_1, \dots, P_n)$ e

$$X = \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : P_1(z) = \dots = P_n(z) = 0\},$$

munido da topologia induzida de $\mathbb{C}^m$. Se A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave, pode-se mostrar, usando o critério do jacobiano e o teorema da função implícita (holomorfa), que X é uma variedade complexa. Toda k -forma diferencial algébrica $\omega \in \Omega_{A/\mathbb{C}}^k$ define então uma k -forma diferencial holomorfa em X , que podemos integrar sobre k -simplexos singulares (suaves por partes) $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$. Pelo teorema de Stokes, se ω é fechada, a integral $\int_{\sigma} \omega$ só depende da classe de homologia de um ciclo σ , e se anula se ω é exata.

Teorema 3.27 (Grothendieck [9]). *Com as notações acima, se A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave, então, para todo $k \geq 0$, a aplicação*

$$H_{\text{dR}}^k(A/\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}), \quad [\omega] \longmapsto \left([\sigma] \mapsto \int_{\sigma} \omega \right)$$

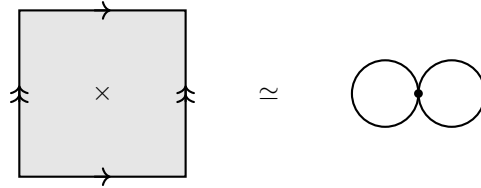
é um isomorfismo de $\mathbb{C}$ -espaços vetoriais.

O espaço $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$ é a *cohomologia singular* $H^k(X, \mathbb{C})$ de X com coeficientes complexos. O ponto notável é que o lado esquerdo é definido de maneira puramente algébrica, a partir apenas das equações $P_1, \dots, P_n$, enquanto o lado direito é puramente topológico. Em particular, a cohomologia de de Rham algébrica não depende da escolha das equações que definem X .

Exemplo 3.28. Revisitemos os exemplos acima.

1. $A = \mathbb{C}[x]$, $X = \mathbb{C}$, que é contrátil: $H_{\text{dR}}^1(A/\mathbb{C}) = 0$.
2. $A = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$, $X = \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq S^1$: $H_{\text{dR}}^1(A/\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. O isomorfismo de Grothendieck envia dx/x ao funcional que associa a um laço γ a integral $\int_{\gamma} dz/z = 2\pi i \cdot (\text{número de voltas de } \gamma \text{ em torno de } 0)$.

3. $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x)$. A curva X é o complementar de um ponto (o “ponto no infinito”) numa curva elíptica E , que topologicamente é um toro. Representando o toro como um quadrado com lados opostos identificados, vemos que o toro menos um ponto se retrai no bordo do quadrado, que após as identificações é um buquê de dois círculos:



Logo $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$, de acordo com o cálculo $H_{\text{dR}}^1(A/\mathbb{C}) = \mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}x\omega$ do Exemplo 3.23. As integrais de $\omega = dx/y$ e de $x\omega = x dx/y$ ao longo dos dois laços são os *períodos* (integrais elípticas de primeira e segunda espécie) da curva elíptica.

Observação 3.29 (Uma fórmula para $\dim H_{\text{dR}}^1$). Os exemplos acima se encaixam num padrão geral. Toda curva algébrica X tal que A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave de dimensão relativa 1 se obtém de uma superfície compacta com g “buracos” (o *gênero* de X) removendo um número finito $n \geq 1$ de pontos (os “pontos no infinito”). Uma tal superfície tem o tipo de homotopia de um buquê de $2g + n - 1$ círculos, de forma que $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus (2g+n-1)}$ e, pelo Teorema 3.27,

$$\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{dR}}^1(A/\mathbb{C}) = 2g + n - 1.$$

Reencontramos assim todos os nossos cálculos:

X	g	n	$\dim H_{\text{dR}}^1$
$\mathbb{C}$	0	1	0
$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	0	2	1
$\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$	0	3	2
$y^2 = x^3 + x$	1	1	2

Para a curva da Observação 2.28 (um toro com dois buracos menos um ponto), obtemos $\dim H_{\text{dR}}^1 = 4$. Note que, enquanto o lado esquerdo da fórmula é definido de maneira puramente algébrica, o lado direito é puramente topológico.

Corolário 3.30. *Se A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave, então $\dim_{\mathbb{C}} H_{\text{dR}}^k(A/\mathbb{C}) < \infty$ para todo $k \geq 0$.*

Demonstração. Admitimos o fato topológico de que X tem o tipo de homotopia de um complexo CW finito, de forma que $H_k(X, \mathbb{Z})$ é um grupo abeliano finitamente gerado. O resultado segue então do Teorema 3.27. $\square$

Corolário 3.31. *Se A é uma $\mathbb{C}$ -álgebra suave de dimensão relativa d (por exemplo, $d = m - n$ na situação do critério do jacobiano), então $H_k(X, \mathbb{Z})$ é um grupo de torção para todo $k > d$.*

Demonstração. Como $\Omega_{A/\mathbb{C}}^k = 0$ para $k > d$, temos $H_{\text{dR}}^k(A/\mathbb{C}) = 0$. Pelo Teorema 3.27, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) = 0$, o que equivale a $H_k(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = 0$, pois $\mathbb{C}$ é um $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial. $\square$

Observação 3.32. O corolário acima é surpreendente: X é uma variedade de dimensão real $2d$, mas sua homologia (racional) se anula acima da dimensão d . De fato, vale um resultado mais forte, devido a Andreotti e Frankel [6]: X tem o tipo de homotopia de um complexo CW de dimensão $\leq d$, e em particular $H_k(X, \mathbb{Z}) = 0$ para $k > d$.

Para ir além

O Teorema 3.27 é o ponto de partida de diversas teorias.

- *Teoria de Hodge.* A estrutura algébrica de $H_{\text{dR}}^k(A/\mathbb{C})$ (por exemplo, a filtração pelo “tipo” das formas, como as formas de primeira e segunda espécie do exemplo da curva elíptica) se reflete em estruturas finas na cohomologia singular: as *estruturas de Hodge* (mistas, no caso não-compacto).
- *Períodos.* Se as equações P_i e a forma ω têm coeficientes em $\mathbb{Q}$, então as integrais $\int_{\sigma} \omega$ são números complexos chamados *períodos* [8]. Por exemplo, $2\pi i = \int_{|z|=1} dz/z$ é um período, bem como os períodos de curvas elípticas e os valores $\zeta(n)$ da função zeta de Riemann. O isomorfismo de Grothendieck, que identifica duas estruturas racionais distintas sobre o mesmo espaço vetorial complexo, é a origem da teoria aritmética dos períodos.
- *Cohomologia p -ádica.* Como vimos no exercício sobre $\mathbb{F}_p[x]$, a cohomologia de de Rham se comporta mal em característica $p > 0$. Teorias de cohomologia p -ádica (Monsky–Washnitzer, cristalina, rígida) corrigem este defeito levantando a situação à característica zero, e têm aplicações importantes à contagem de pontos de variedades sobre corpos finitos.

Apêndice: álgebras e conjuntos algébricos

Ao longo destas notas, usamos livremente o ponto de vista segundo o qual uma $\mathbb{C}$ -álgebra de tipo finito é um anel de funções num subconjunto de $\mathbb{C}^m$ definido por equações polinomiais. Neste apêndice, resumimos este dicionário. Para as demonstrações, veja, por exemplo, [2]. Usamos o corpo $\mathbb{C}$ apenas por conveniência: tudo o que segue vale igualmente, com as mesmas demonstrações, substituindo $\mathbb{C}$ por um corpo algebricamente fechado k qualquer.

Definição A.1. Uma $\mathbb{C}$ -álgebra A é de *tipo finito* se é gerada, como $\mathbb{C}$ -álgebra, por um número finito de elementos; equivalentemente, se $A \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/I$ para algum m e algum ideal I . Pelo teorema da base de Hilbert, $I = (P_1, \dots, P_r)$ é finitamente gerado, de forma que A é de apresentação finita. O *conjunto algébrico* associado é

$$\begin{aligned} X = V(I) &= \{z \in \mathbb{C}^m : P(z) = 0 \text{ para todo } P \in I\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^m : P_1(z) = \dots = P_r(z) = 0\}. \end{aligned}$$

Como na Aula 1, todo $f = F + I \in A$ define uma função $X \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto F(z)$, que não depende do representante F . A ponte entre a álgebra e a geometria é o teorema seguinte.

Teorema A.2 (Nullstellensatz de Hilbert). *Seja I um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$.*

1. *Os ideais maximais deste anel são exatamente os ideais*

$$\mathfrak{m}_z = (x_1 - z_1, \dots, x_m - z_m), \quad z \in \mathbb{C}^m.$$

2. *Se $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ se anula em todos os pontos de $V(I)$, então $F^n \in I$ para algum $n \geq 1$.*

Corolário A.3. *Seja $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/I$ e $X = V(I)$.*

1. *As aplicações*

$$X \longrightarrow \{\text{ideais maximais de } A\} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(A, \mathbb{C}),$$

dadas por $z \mapsto \mathfrak{m}_z/I$ e $\mathfrak{m} \mapsto (A \rightarrow A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C})$, são bijeções. Em particular, $A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A .

2. *Um elemento $f \in A$ define a função nula em X se e somente se f é nilpotente. Em particular, se A é reduzida (isto é, não tem nilpotentes não-nulos), então A se identifica a um anel de funções em X .*

Demonstração. Os ideais maximais de A correspondem aos ideais maximais de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ que contêm I , isto é, aos $\mathfrak{m}_z \supset I$. Como $P \in \mathfrak{m}_z$ se e somente se $P(z) = 0$, temos $\mathfrak{m}_z \supset I$ se e somente se $z \in X$. Um morfismo $A \rightarrow \mathbb{C}$ é sobrejetivo, logo seu núcleo é maximal; reciprocamente, $A/(\mathfrak{m}_z/I) \cong \mathbb{C}$ via $f \mapsto f(z)$. Isto prova 1. A afirmação 2 é uma reformulação da segunda parte do Nullstellensatz. $\square$

Observação A.4 (Morfismos). Seja $B = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]/J$, com $Y = V(J)$. Um morfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\varphi : A \rightarrow B$ é determinado pelas imagens $\varphi(x_i + I) = G_i + J$, e induz a aplicação polinomial nos pontos

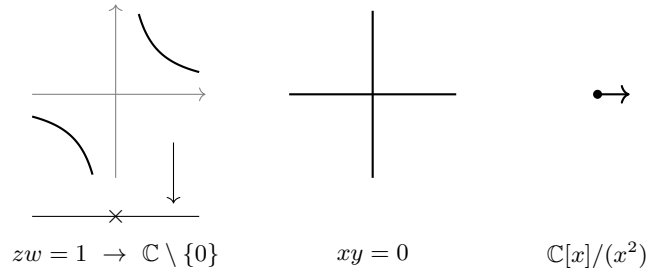
$$\varphi_* : Y \longrightarrow X, \quad w \longmapsto (G_1(w), \dots, G_m(w)).$$

Ela está bem definida, pois $P(G_1, \dots, G_m) \in J$ para todo $P \in I$. Em termos do Corolário A.3, φ_* é simplesmente $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$, de $\text{Hom}(B, \mathbb{C})$ em $\text{Hom}(A, \mathbb{C})$. Note a inversão do sentido das flechas: para toda $f \in A$, temos $\varphi(f) = f \circ \varphi_*$, isto é, φ é o *pullback* de funções ao longo de φ_* : os pontos vão de Y para X , as funções de X para Y .

Exemplo A.5. 1. $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ corresponde a $X = \mathbb{C}^m$.

2. $\mathbb{C}[x, x^{-1}] \cong \mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$ corresponde à hipérbole $\{zw = 1\}$, que se projeta bijetivamente sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mais geralmente, a localização $A[1/f]$ corresponde ao aberto $\{z \in X : f(z) \neq 0\}$.
3. $\mathbb{C}[x, y]/(xy)$ corresponde à união dos dois eixos coordenados. Este anel não é um domínio: x e y são funções não-nulas, cada uma se anulando sobre um dos eixos, cujo produto é nulo.
4. $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ corresponde a $X = \{0\}$, um único ponto. Porém, este anel tem dimensão 2 sobre $\mathbb{C}$: a classe de x é um nilpotente não-nulo, que define a função nula em X . Pensamos em $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ como o anel de funções de um ponto munido de uma “direção infinitesimal”. Este é o anel dos números duais $\mathbb{C}[\varepsilon]$ da Aula 2: para $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/I$ qualquer, os morfismos $A \rightarrow \mathbb{C}[\varepsilon]$ correspondem aos pares (z, v) formados por um ponto $z \in X$ e um vetor $v \in \mathbb{C}^m$ tangente a X em z , isto é, tal que $\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(z)v_i = 0$ para todo $P \in I$.

Os exemplos 2, 3 e 4 estão ilustrados abaixo (pontos reais).



Estes últimos exemplos ilustram por que a teoria de esquemas, que associa um espaço geométrico a *qualquer* anel, inclusive com nilpotentes, é a linguagem natural para os métodos destas notas.

Referências

- [1] H. Matsumura, *Commutative ring theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, Reading, 1969.
- [3] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer, New York, 1995.
- [4] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer, New York, 1977.
- [5] The Stacks Project Authors, *The Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>.
- [6] A. Andreotti, T. Frankel, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections*. Annals of Mathematics 69 (1959), 713–717.
- [7] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [8] M. Kontsevich, D. Zagier, *Periods*. In: Mathematics Unlimited: 2001 and Beyond, Springer, Berlin, 2001, 771–808.
- [9] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*. Publications Mathématiques de l’I.H.É.S, tome 29 (1966), 95–103.