

Curvas integrais e independência algébrica

Tiago Jardim da Fonseca*

19 de Agosto de 2015

Resumo

Num primeiro momento, explicaremos o teorema de Nesterenko acerca da independência algébrica de valores de séries de Eisenstein. Em seguida, indicaremos formulações mais geométricas deste teorema, bem como possíveis generalizações, e discutiremos alguns problemas de natureza geométrica que emergem naturalmente na busca de novos exemplos.

Conteúdo

1 O teorema de Nesterenko	1
2 Em busca de uma formulação geométrica	3
3 Curvas moderadas e equações diferenciais	5
4 Apêndice: um esboço de demonstração	9

1 O teorema de Nesterenko

Esta seção apresenta o teorema de Nesterenko como motivação para as duas seções seguintes. Para uma ideia da demonstração deste resultado, referimos o leitor ao apêndice deste texto.

A série de Eisenstein (normalizada) de peso $2k$, $k \geq 1$, é definida pela fórmula

$$E_{2k}(q) = 1 + (-1)^k \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n \geq 1} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

onde B_{2k} é o $2k$ -ésimo número de Bernoulli¹ e $\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}$. A estimativa trivial $\sigma_{2k-1}(n) = O(n^{2k})$ mostra em particular que E_{2k} converge para todo q no disco unitário complexo D e define uma função holomorfa neste aberto.

Em seguida, adotaremos as seguintes notações estabelecidas por Ramanujan:

$$\begin{aligned} P(q) = E_2(q) &= 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n \\ Q(q) = E_4(q) &= 1 + 240 \sum_{n \geq 1} \sigma_3(n) q^n \\ R(q) = E_6(q) &= 1 - 504 \sum_{n \geq 1} \sigma_5(n) q^n \end{aligned}$$

* Université Paris-Sud XI.

¹Mais precisamente, $\sum_{j=0}^{\infty} (B_j/j!) t^j = t/(\exp(t) - 1)$. Por exemplo, $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$.

Em 1996, Yuri V. Nesterenko provou o seguinte resultado surpreendente, que lhe valeu o prêmio Ostrowski.

Teorema 1.1 (Nesterenko [5]). Para todo $q \in \mathbb{D} \setminus 0$,

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(q, P(q), Q(q), R(q)) \geq 3.$$

Vejamos um exemplo concreto.

Exemplo 1.1. A teoria de funções elípticas mostra que

$$P(e^{-2\pi}) = \frac{3}{\pi}, \quad Q(e^{-2\pi}) = 3 \left(\frac{\omega_1}{\pi} \right)^4, \quad R(e^{-2\pi}) = 0$$

onde $\omega_1 = \Gamma(1/4)^2 / \sqrt{8\pi}$ é a “constante da lemniscata”. Pelo teorema de Nesterenko,

$$\deg \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(e^{-2\pi}, P(e^{-2\pi}), Q(e^{-2\pi})) = 3$$

Por outro lado, o corpo $\mathbf{Q}(\pi, e^\pi, \Gamma(1/4))$ é algébrico sobre $\mathbf{Q}(e^{-2\pi}, P(e^{-2\pi}), Q(e^{-2\pi}))$. Consequentemente, π , e^π e $\Gamma(1/4)$ são algebricamente independentes. Vale notar que mesmo a independência algébrica entre π e e^π não era conhecida antes do teorema de Nesterenko!

Para provar seu resultado, Nesterenko criou um *método* que se serve das cinco propriedades seguintes das séries P, Q e R:

1. Coeficientes que crescem polinomialmente.
2. Raio de convergência ≥ 1 .
3. Coeficientes inteiros.
4. Equação de diferencial algébrica satisfazendo a D-propriedade.
5. Independência algébrica sobre $\mathbf{C}(q)$.

Expliquemos rapidamente a quarta propriedade. É um fato clássico na teoria de formas (quase-)modulares que as séries P, Q e R satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais não-lineares, conhecidas como “equações de Ramanujan”:

$$q \frac{d}{dq} P = \frac{1}{12} (P^2 - Q)$$

$$q \frac{d}{dq} Q = \frac{1}{3} (PQ - R)$$

$$q \frac{d}{dq} R = \frac{1}{2} (PR - Q^2)$$

A D-propriedade é uma condição técnica que diz respeito às subvariedades algébricas de $\mathbf{A}^4(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^4$ invariantes pelo campo

$$v = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{1}{12} (x_1^2 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{3} (x_1 x_2 - x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2} (x_1 x_3 - x_2^2) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

A quinta propriedade diz que não existe polinômio não-nulo $f \in \mathbf{C}(q)[x, y, z]$ tal que $f(P, Q, R) = 0$. Isto é consequência de um teorema de Mahler sobre a função j [4] e do fato que podemos expressar P, Q e R como combinações algébricas de derivadas de j .

Desde a publicação do teorema de Nesterenko, especialistas em teoria de transcendência têm se questionado o seguinte:

Questão. É possível aplicar o método de Nesterenko a outras séries?

Em outras palavras, estamos buscando por séries satisfazendo as cinco propriedades anteriores. Infelizmente, até a presente data, nenhum exemplo essencialmente novo – isto é, que não possa ser “explicado” por séries de Eisenstein – foi descoberto. Por outro lado, não excluimos também a possibilidade que tais exemplos não existam.

2 Em busca de uma formulação geométrica

Sendo a resposta da questão acima positiva ou negativa, faz-se necessário um estudo mais aprofundado do método de Nesterenko. Por exemplo, podemos nos questionar se as propriedades 1 a 5 são de fato as “condições certas” a serem verificadas, ou se não são apenas instâncias particulares de propriedades mais gerais e naturais.

Observemos que as propriedades 4 e 5 são de natureza algebro-geométricas, enquanto que as propriedades 1 e 2 são analíticas e 3 é aritmética. O objetivo desta seção é propor variantes *geométricas* de 1 e 2 que englobam o caso estudado por Nesterenko.

Analisemos, primeiramente, os objetos utilizados na demonstração de Nesterenko sob uma ótica ligeiramente mais geométrica. Neste caso, temos um campo vetorial algébrico com coeficientes racionais $v \in \Gamma(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^4, \mathbf{T}_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^4})$, definido como acima, e uma curva holomorfa (paramétrica)

$$\begin{aligned} u : D &\rightarrow \mathbf{A}^4(\mathbf{C}) \\ z &\mapsto (z, P(z), Q(z), R(z)) \end{aligned}$$

log-integral de v no ponto $p = (0, 1, 1, 1) \in \mathbf{A}^4(\mathbf{Z})$, isto é, $u(0) = p$, $u'(0) \neq 0$ e

$$zu'(z) = v(u(z))$$

para todo $z \in D$. A propriedade 5 diz que u é **transcendente**: não existe subvariedade algébrica própria de $\mathbf{A}^4(\mathbf{C})$ contendo u .

Grosso modo, o método de Nesterenko diz então que, se a curva u pode ser **definida sobre \mathbf{Z}** em $z = 0$ ² e possui uma certa **condição de crescimento**, então os valores $u(z)$, para $z \neq 0$, serão transcendentos no sentido seguinte: não existe subvariedade algébrica própria X de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^4$ tal que $u(z) \in X(\mathbf{C})$.

A condição de crescimento que utilizaremos é inspirada na teoria de Nevanlinna. Seja M uma variedade complexa (suave) projetiva e escolha um produto hermitiano h sobre M . A este produto hermitiano, está associada uma 2-forma positiva $\omega \in A^{1,1}(M)_{\mathbf{R}}$ pela fórmula

$$\omega(v, w) = \frac{i}{2}(h(v, w) - \overline{h(v, w)})$$

Seja $u : D \rightarrow M$ uma curva holomorfa. A todo $t \in [0, 1[$, podemos calcular a “área de $u(D_t)$ ” pela fórmula

$$a_u(t) = \int_{D_t} u^* \omega$$

²Neste caso, isto quer dizer que os coeficientes de Taylor das coordenadas de u são inteiros.

e podemos medir como esta área varia segundo uma “média logarítmica”

$$T_u(r) = \int_0^r a_u(t) \frac{dt}{t}$$

para $r \in [0, 1[$. Definimos desta maneira uma função contínua e crescente $T_u : [0, 1[\rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, dita **função característica** de u .

Definição 2.1. Dizemos que u é **moderada** (ou possui **crescimento moderado**) se

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{T_u(r)}{\log \frac{1}{1-r}} < \infty$$

A condição acima é equivalente à existência de $a, b \in \mathbf{R}$ tais que

$$T_u(r) \leq a + b \log \frac{1}{1-r}$$

para todo $r \in [0, 1[$.

Observação 2.1. É possível dar ainda uma outra definição equivalente fazendo-se uso da métrica de Poincaré em D . Esta definição geométrica tem como virtude evidenciar o fato que crescimento moderado é uma noção invariante por automorfismos do disco.

Exemplo 2.1 (Crescimento polinomial). Consideremos $M = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ com a métrica de Fubini-Study. Sobre o aberto $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, a forma ω é dada por

$$\omega = dd^c \log(1 + |z|^2) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{1 + |z|^2} dz \wedge d\bar{z}$$

Consideremos uma curva $u : D \rightarrow \mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ cujos coeficientes de Taylor a_n crescem polinomialmente com n , isto é, satisfazem $a_n = O(n^k)$ para algum $k \in \mathbf{N}$. Vamos mostrar que u é moderada.

Para estimar $T_u(r)$, utilizaremos a fórmula seguinte³: se $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^2 , então

$$\int_0^r \left(\int_{D_t} dd^c g \right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) d\theta - g(0) \right)$$

Consequentemente, basta estimar a integral

$$\begin{aligned} I(r) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log(1 + |u(re^{i\theta})|^2) d\theta = \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |u(re^{i\theta})|^2} d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \log^+ |u(re^{i\theta})| d\theta + \log \sqrt{2} \end{aligned}$$

para r próximo de 1. Ora,

$$|u(re^{i\theta})| = \left| \sum_{n \geq 0} a_n (re^{i\theta})^n \right| \leq \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n \ll \left(\frac{1}{1-r} \right)^{k+1}$$

³Isto é uma consequência da fórmula de Stokes e da expressão de d^c em coordenadas polares:

$$d^c = \frac{i}{4\pi} (\bar{\partial} - \partial) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \otimes d\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \otimes dr \right)$$

Logo

$$I(r) \leq \log \sqrt{2} + 2(k+1)\pi \log \frac{1}{1-r}$$

quando r está próximo de 1.

Observação 2.2. O conjunto de funções holomorfas $u : D \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ forma um corpo – o corpo $\mathcal{M}(D)$ de funções meromorfas sobre D – e podemos investigar como a função característica se comporta com relação às operações algébricas neste corpo. Diremos apenas que pode-se mostrar que o conjunto de funções moderadas forma um corpo, algebricamente fechado em $\mathcal{M}(D)$.

A compacidade de M mostra que a noção de crescimento moderado não depende do produto hermitiano escolhido, logo esta definição depende apenas de M . Um dos motivos pelos quais esta noção é tão flexível se deve ao teorema seguinte.

Teorema 2.3 (Invariância birracional). Sejam M e N duas variedades complexas projetivas, $f : M \rightarrow N$ um morfismo birracional e $u : D \rightarrow M$ uma curva holomorfa. Então u é moderada se, e somente se, $f \circ u$ é moderada.

Dentre as inúmeras consequências deste teorema, destacamos o fato que podemos definir de maneira *canônica* a noção de crescimento moderado numa variedade *quase-projetiva* M : basta considerar uma compactificação projetiva \bar{M} de M .

Por exemplo, tanto $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ quanto $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \cdots \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ definem compactificações de $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ e podemos definir funções características segundo às formas de Fubini-Study $\omega_1 = \omega_{\mathbf{P}^n}$ ou $\omega_2 = \omega_{\mathbf{P}^1} \oplus \cdots \oplus \omega_{\mathbf{P}^1}$. O teorema acima diz que uma curva holomorfa $u : D \rightarrow \mathbf{A}^n(\mathbf{C})$ será moderada com respeito a ω_1 se, e somente se, ela é moderada com respeito a ω_2 . Em particular, quando temos uma curva em $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$, podemos estudar o crescimento moderado coordenada por coordenada.

Por fim, um resultado não publicado devido a Bost-Randriambololona (cf. apêndice) justifica o interesse em curvas moderadas. Informalmente, ele diz que *o método de Nesterenko pode ser adaptado de forma a englobar curvas moderadas quaisquer*.

Observação 2.4. A noção de crescimento moderado pode ser definida sobre domínios mais gerais que D . De fato, utilizando-se das funções de Green é possível definir (*work in progress!*) uma noção análoga de crescimento moderado para uma superfície de Riemann hiperbólica qualquer. Isto é desejável se buscamos outros exemplos para aplicar o método de Nesterenko. Neste caso, a condição 2 tem de ser substituída por uma outra condição natural em teoria do potencial.

3 Curvas moderadas e equações diferenciais

Na seção precedente, vimos que o crescimento moderado de uma curva é suficiente para o método de Nesterenko. No caso clássico estudado por Nesterenko, tínhamos um certo conhecimento explícito sobre os coeficientes de Taylor das funções envolvidas, e isto mostra que a curva que estas funções definem é moderada. Em geral não podemos ser tão otimistas e podemos nos questionar se o crescimento moderado não pode ser deduzido de outra maneira.

As curvas que nos interessam são tangentes a uma laminação algébrica⁴ e podemos esperar que tal situação imponha restrições no crescimento de u . De fato este é o caso se $M = \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, pelo menos genericamente, como veremos mais a frente.

Seja h um produto hermitiano sobre M , ω a 2-forma associada a h como explicado acima, e $u : D \rightarrow M$ uma curva holomorfa. Consideremos a métrica de Poincaré sobre D , cujo elemento de arco é dado pela fórmula

$$ds = \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|$$

O elemento de área de D é induzido pela 2-forma

$$d\mu = \frac{i}{2} \left(\frac{2}{1 - |z|^2} \right)^2 dz \wedge d\bar{z}$$

Um cálculo simples mostra que

$$u^* \omega = \|u'(z)\|^2 d\mu$$

onde $\|u'(z)\|$ denota a norma da aplicação tangente associada a u no ponto z segundo as métricas h em M e de Poincaré em D . Diremos que $\|u'(z)\|$ é a **derivada hiperbólica** de u em z .

Proposição 3.1. Se a derivada hiperbólica de u é limitada em D , então u é moderada.

Demonstração. Basta provar que existem $a, b \in \mathbf{R}$ tais que a função

$$E(r) = \int_0^r \left(\int_{D_t} d\mu \right) \frac{dt}{t}$$

satisfaz $E(r) \leq a + b \log \frac{1}{1-r}$. Um cálculo direto em coordenadas polares mostra que

$$E(r) = 8\pi \log \frac{1}{1+r} + 8\pi \log \frac{1}{1-r}$$

e podemos tomar $a = 0$ e $b = 8\pi$. ■

A classificação de fibrados linha sobre um espaço projetivo mostra que toda laminação em $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ é induzida por uma seção global de $\mathcal{O}(k) \otimes T_{\mathbf{P}^n}$, para algum $k \in \mathbf{Z}$. Dizemos que laminação é de grau d se ela é induzida por uma seção de $\mathcal{O}(d-1) \otimes T_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})}$. O conjunto

$$\mathcal{L}(n, d) = \mathbf{P}(H^0(\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}(d-1) \otimes T_{\mathbf{P}^n}))$$

de laminações de grau d em \mathbf{P}^n é, canonicamente, um espaço projetivo e, portanto, uma variedade algébrica.

Teorema 3.1 (Brunella, cf. [3]). Seja $d \geq 2$. Existe um aberto de Zariski $U \subset \mathcal{L}(n, d)$ tal que toda curva $u : D \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ tangente a uma laminação de U possui derivada hiperbólica limitada.

⁴Isto é, uma folheação (singular) algébrica de dimensão 1. Tal objeto pode ser definido a partir de um recobrimento aberto, na topologia de Zariski, $M = \bigcup_j U_j$, campos algébricos $v_i \in \Gamma(U_i, T_{U_i})$ e funções de transição $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^\times)$ tais que $v_i = g_{ij} v_j$ e $g_{ik} = g_{ij} g_{jk}$. Equivalentemente, uma laminação é dada a partir de uma seção global de $L \otimes T_M$, onde L é um fibrado linha algébrico sobre M .

Aqui, dizemos que u é *tangente* a uma laminação \mathcal{L} se, fora do conjunto singular de \mathcal{L} , a imagem de u está localmente contida em folhas de \mathcal{L} . A condição é vazia dentro do conjunto singular de \mathcal{L} .

Observação 3.2. Explicitamente, podemos tomar U como sendo o conjunto das laminações que não possuem curvas algébricas invariantes e cujas singularidades são isoladas hiperbólicas⁵.

O ponto central deste teorema é que uma folheação em U não admite curvas tangentes *inteiras*. Admitindo-se este fato, indiquemos as linhas gerais de sua demonstração.

“*Demonstração*”. Suponha que uma laminação \mathcal{L} sobre uma variedade projetiva hermitiana (M, h) satisfaça a seguinte hipótese: não existe $\mathbf{C} \rightarrow M$ não-constante tangente a \mathcal{L} . (Em particular, o conjunto singular de \mathcal{L} é Brody hiperbólico.) A demonstração do teorema se dá por contradição, como na demonstração do lema de Brody: supomos que existe $u : D \rightarrow M$ tangente a \mathcal{L} satisfazendo

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |u'(z)| = +\infty$$

onde $|u'(z)|^2 = h(u'(z), u'(z))$, e utilizamos u para construir, via reparametrizações e um argumento de equicontinuidade, uma curva inteira $\bar{u} : \mathbf{C} \rightarrow M$ tangente a \mathcal{L} . Mais precisamente, construímos uma sequência $t_n : D \rightarrow M$ satisfazendo

1. t_n é uma reparametrização de u , i.e. uma composição de u com um automorfismo do disco e eventualmente uma homotetia $z \rightarrow rz$ para $r < 1$.
2. $\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |t'_n(z)| = |t'_n(0)|$.
3. $r_n = |t'_n(0)|$ tende monotonicamente a $+\infty$.

Definimos então $u_n : D_{r_n} \rightarrow M$ por $u_n(z) = t_n(z/r_n)$. A segunda condição sobre os t_n implica que

$$|u'_n(z)| \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{|z|}{r_n}\right)^2}$$

para todo $z \in D_{r_n}$. O teorema do valor médio mostra que a sequência u_n é equicontínua e o teorema de Ascoli, por sua vez, garante que existe uma subsequência de u_n que converge uniformemente em compactos a uma curva holomorfa $\bar{u} : \mathbf{C} \rightarrow M$. Como cada u_n é tangente a \mathcal{L} , é fácil ver que \bar{u} é tangente a \mathcal{L} , o que é absurdo. ■

Por outro lado, em alguns casos simples, podemos ser bastante precisos. Consideremos, sobre $\mathbf{A}^n(\mathbf{C})$, o campo

$$v = P_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + P_n(x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

onde $P_i \in \mathbf{C}[x_i]$. Então toda curva log-integral de v é moderada. Este resultado é uma consequência simples do teorema “do tipo Picard” seguinte.

⁵Se $v = \sum_i P_i \partial/\partial x_i$, uma singularidade isolada p de v é *hiperbólica* se todos os autovalores λ_i de $(\partial P_i / \partial x_j|_p)$ são não-nulos e satisfazem $\lambda_i / \lambda_j \notin \mathbf{R}$ para todos i, j .

Teorema 3.3. Seja $u : D \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ holomorfa. Se a imagem de u omite três pontos, então a derivada hiperbólica de u é limitada em D .

Demonstração. Este teorema é uma consequência do fato que toda função automorfa⁶ $f : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, onde $\mathfrak{h} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$ possui derivada hiperbólica limitada. Ora, a uniformização complexa de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ é a função $\lambda : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, que é uma forma automorfa de nível $\Gamma(2)$. Ademais, toda função holomorfa $u : D \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ se fatora por λ e o resultado segue do lema de Schwarz em análise complexa. ■

Vejamos agora como este último teorema implica o resultado anterior. Trata-se de mostrar que uma aplicação holomorfa $u : D \rightarrow \mathbf{A}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ que satisfaz uma equação diferencial do tipo

$$zu'(z) = P(u(z))$$

para todo $z \in D$, onde $P \in \mathbf{C}[T]$, é moderada. Vamos supor que u não é constante. Se P possui uma única raiz, podemos resolver facilmente a equação e constatar que u é moderada. Senão, P possui pelo menos duas raízes distintas. Suponha, por absurdo, que a derivada hiperbólica de u não é limitada e considere $q : \mathfrak{h} \rightarrow D$ definida por $q(\tau) = \exp(2i\pi\tau)$. É possível mostrar que, então, a derivada hiperbólica de $u \circ q : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ não é limitada⁷ e o teorema do tipo Picard implica que existe $\tau \in \mathfrak{h}$ tal que $u(q(\tau))$ é uma raiz de P . Como $q(\tau) \neq 0$, é fácil mostrar, utilizando a equação diferencial, que u é constante igual a $u(q(\tau))$, o que é absurdo.

Observação 3.4. Note que as singularidades de um campo da forma $v = \sum_i P_i(x_i) \partial/\partial x_i$ são isoladas, mas não hiperbólicas em geral. Em particular, o resultado genérico de Brunella *não* se aplica a este caso simples!

Observação 3.5. Um exemplo mais emocionante é o seguinte. Considere um campo sobre $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ da forma

$$v = x \frac{\partial}{\partial x} + P(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

É possível mostrar, com a ajuda do segundo teorema fundamental da teoria de Nevanlinna que toda curva log-integral de v é moderada.

Observação 3.6. É claro que não podemos esperar que toda curva log-integral de um campo qualquer seja moderada. Um cálculo penoso mostra que a curva $u : D \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dada por

$$u(z) = \exp\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)$$

não é moderada. Por outro lado, é fácil constatar que u é componente de uma curva em $\mathbf{A}^3(\mathbf{C})$ log-integral de um campo polinomial.

Para encerrar esta seção mencionamos um problema natural ainda sem resposta: a curva de Nesterenko

$$u : z \mapsto (z, P(z), Q(z), R(z))$$

possui derivada hiperbólica limitada?

⁶Isto é, uma função meromorfa sobre \mathfrak{h} , invariante por um subgrupo Γ de índice finito em $SL_2(\mathbf{Z})$ (o “nível” de f) e satisfazendo uma condição de crescimento nas cúspides : para todo $\gamma \in \Gamma$, existe $c_\gamma \in \mathbf{R}$ tal que $\limsup_{\text{Im } \tau \rightarrow \infty} |f(\gamma\tau)|/e^{c_\gamma \text{Im } \tau} < \infty$.

⁷A recíproca também é verdadeira. Aqui, estamos utilizando a métrica de Poincaré em \mathfrak{h} .

4 Apêndice: um esboço de demonstração

A demonstração do teorema de Nesterenko consiste numa aplicação do seguinte “critério de independência algébrica” e segue o arquétipo de uma prova de transcendência usual: polinômios auxiliares, lema de zeros, etc.

Seja $n \geq 1$. Escolhamos primeiramente uma norma $\| \cdot \|$ e uma função grau \deg sobre o \mathbf{C} -espaço vetorial $\Gamma(\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}, \mathcal{O}) = \mathbf{C}[x_0, \dots, x_n]$.

Teorema 4.1 (Phillipon, [6]). Seja $p \in \mathbf{A}^{n+1}(\mathbf{C})$ tal que existem $b > a > 0$ e $f_j \in \Gamma(\mathbf{A}^{n+1}, \mathcal{O})$, para $j \gg 0$, satisfazendo

$$(i) \quad \deg f_j \ll j \log j$$

$$(ii) \quad \log \|f_j\| \ll j(\log j)^2$$

$$(iii) \quad \exp(-bj^{n+1}) \leq |f_j(p)| \leq \exp(-aj^{n+1})$$

Então $\deg \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(p) \geq n$.

Seja $u : D \rightarrow \mathbf{A}^{n+1}(\mathbf{C})$ uma curva holomorfa moderada e transcendente. Suponhamos também que u é definida sobre \mathbf{Z} em $0 \in D$. O primeiro passo do método consiste em encontrar os “polinômios auxiliares” g_j .

Lema 4.1. Para $j \gg 0$, existem $g_j \in \Gamma(\mathbf{A}^{n+1}, \mathcal{O}) \setminus 0$ satisfazendo

$$1. \quad \deg g_j \ll j$$

$$2. \quad \log \|g_j\| \ll j \log j$$

$$3. \quad \operatorname{ord}_{z=0} g_j \circ u(z) \gg j^{n+1}$$

No caso clássico, i.e. os coeficientes de Taylor de u possuem crescimento polinomial, este lema é uma aplicação do “Lema de Siegel”: sejam $r, s \in \mathbf{Z}$ tais que $s > r$ e $A = (a_{ij}) \in M_{r \times s}(\mathbf{Z})$ satisfazendo $\|A\|_{\infty} \leq b$; então existe $x \in \mathbf{Z}^s \setminus 0$ com $\|x\|_{\infty} \leq (sb)^{r/(s-r)}$ tal que $Ax = 0$. Em geral, se dispomos apenas do crescimento moderado de u , podemos aplicar o “método das inclinações” de J-B. Bost em teoria de Arakelov (cf. 4.2, [2]).

Em seguida, fixamos $q \in D \setminus 0$, e denotamos $p = u(q)$ e $m_j = \operatorname{ord}_{z=0} g_j \circ u(z)$. A próxima etapa consiste em demonstrar o lema seguinte.

Lema 4.2. Existem $\beta > \alpha > 0$ e, para $j \gg 0$, uma sequência de inteiros $k_j \ll j \log m_j$ satisfazendo

$$\exp(-\beta m_j) \leq |(g_j \circ u)^{(k_j)}(q)| \leq \exp(-\alpha m_j)$$

Intuitivamente, podemos ler a desigualdade $|(g_j \circ u)^{(k_j)}(q)| \geq \exp(-\beta m_j)$ da maneira seguinte. Notemos que, se a expansão de Taylor de uma função num certo ponto é “pequena”, então por continuidade a expansão em outro ponto será também pequena. Por absurdo, se todas as derivadas de $g_j \circ u$ em q forem muito pequenas, então suas derivadas em 0 também serão muito pequenas, o que *contradiz o fato de que os coeficientes de Taylor são inteiros*.

Observação 4.2. A demonstração de Nesterenko deste fato é envolvida e utiliza alguns truques envolvendo cálculos de resíduos. É possível dar uma demonstração um pouco mais natural se nos colocarmos no contexto arakeloviano mencionado acima.

A desigualdade $|(g_j \circ u)^{(k_j)}(q)| \leq \exp(-\alpha m_j)$ é uma consequência das desigualdades de Cauchy.

Suponhamos agora que u seja log-integral de um campo $\nu \in \Gamma(\mathbf{A}^{n+1}, \mathbf{T}_{\mathbf{A}^{n+1}})$. Para simplificar as notações, estamos supondo que os coeficientes de ν são inteiros, mas o teorema vale se considerarmos coeficientes racionais.

Seja ∂_ν a derivação associada a ν e defina, para $k \geq 1$,

$$D_k = \partial_\nu \circ (\partial_\nu - 1) \circ \cdots \circ (\partial_\nu - (k-1))$$

Podemos definir então, para $j \gg 0$,

$$f_j = D_{k_j} g_j$$

Como $k_j \ll j \log m_j$, é fácil verificar que

- (i) $\deg f_j \ll j \log m_j$
- (ii) $\log \|f_j\| \ll j(\log j)(\log m_j)$

Além disso, a identidade

$$z^k \left(\frac{d}{dz} \right)^k = z \frac{d}{dz} \circ \left(z \frac{d}{dz} - 1 \right) \circ \cdots \circ \left(z \frac{d}{dz} - (k-1) \right)$$

mostra que

$$q^{k_j} (g_j \circ u)^{(k_j)}(q) = D_{k_j} g_j(u(q)) = f_j(p)$$

Pela desigualdade do lema precedente, obtemos

$$\exp(-\beta m_j - c k_j) \leq |f_j(p)| \leq \exp(-\alpha m_j - c k_j)$$

onde $c = \log \frac{1}{|q|} > 0$. Como $k_j \ll j \log m_j$ e $m_j \gg j^{n+1}$, então $k_j \ll m_j$. Logo, a menos de renomear a constante β , deduzimos que

$$\exp(-\beta m_j) \leq |f_j(p)| \leq \exp(-\alpha m_j)$$

A última, e notoriamente mais difícil, etapa da demonstração consiste em mostrar que a sequência m_j é assintoticamente comparável a j^{n+1} – isto é, $m_j \ll j^{n+1}$ e $j^{n+1} \ll m_j$ –. É aqui que devemos supor que ν satisfaz a D-propriedade. Isto é consequência do seguinte “lema de zeros”.

Lema 4.3. Seja $u : D \rightarrow \mathbf{A}^{n+1}(\mathbf{C})$ curva log-integral de um campo algébrico $\nu \in \Gamma(\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}, \mathbf{T}_{\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}})$ satisfazendo a D-propriedade. Então existe $C > 0$ tal que, para todo $f \in \Gamma(\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n+1}, \mathcal{O})$ que não anula identicamente u , temos

$$\text{ord}_{z=0}(f \circ u)(z) \leq C(\deg f)^{n+1}$$

Para demonstrar este lema, Nesterenko emprega argumentos intrincados de teoria da eliminação (álgebra comutativa). Atualmente, dispomos de uma demonstração mais natural e geométrica envolvendo teoria de intersecção de ciclos *analíticos*, encontrada por Binyamini [1].

Observação 4.3. Na prática, Nesterenko teve de mostrar também que o campo associado às equações de Ramanujan satisfaz a D-propriedade, o que é bastante difícil.

Para finalizar, daremos um gostinho da demonstração do lema de zeros, trabalhando com o menor caso possível $n = 1$. Neste caso, pode-se provar que a D-propriedade é sempre satisfeita. Isto quer dizer que $\text{ord}_{z=0} f \circ u(z)$ é uniformemente limitada para todo $f \in \mathbf{C}[x, y] = \Gamma(\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^2, \mathcal{O})$ irreduzível, que não se anula identicamente sobre u e tal que $\partial_v f \mid f$ (isto é, $V(f)$ é v -invariante).

Escrevamos

$$v = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

com $a, b \in \mathbf{C}[x, y]$ e considere $f \in \mathbf{C}[x, y]$ irreduzível, que não se anula identicamente sobre u . Se $V(f)$ é v -invariante, não há nada a fazer. Senão, defina $g = \partial_v f$ e observe que, como f é irreduzível, então $V(f)$ e $V(g)$ se intersectam propriamente. Ademais, pelo teorema de Bézout,

$$\deg V(f) \cdot V(g) \leq (\deg f) \cdot (\deg g) \leq (\deg f)(\deg f + \delta)$$

onde $\delta = \max\{\deg a, \deg b\}$.

Por outro lado, se $i(p, V(f) \cdot V(g))$ denota a multiplicidade do zero-ciclo $V(f) \cdot V(g)$ em $p = u(0)$, então

$$\deg V(f) \cdot V(g) \geq i(p, V(f) \cdot V(g))$$

Logo, é suficiente mostrar que

$$\text{ord}_{z=0}(f \circ u)(z) \leq i(p, V(f) \cdot V(g))$$

Em seguida, denotaremos \mathcal{O}_p o anel local de $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ em p . Note que, para $f \in \mathcal{O}_p$, ainda é possível definir de maneira inequívoca a “multiplicidade” $\text{ord}_{z=0}(f \circ u)(z)$. Para todo $m \geq 0$, podemos definir um ideal I_m de \mathcal{O}_p :

$$I_m = \{f \in \mathcal{O}_p \mid \text{ord}_{z=0}(f \circ u)(z) \geq m\}$$

Note que, para todo m , temos uma injeção

$$\begin{aligned} I_m / I_{m+1} &\hookrightarrow \mathbf{C} \\ f &\mapsto (f \circ u)^{(m)}(0) \end{aligned}$$

e, como $u'(0) \neq 0$, esta aplicação é um isomorfismo! Logo, $\dim_{\mathbf{C}} I_m / I_{m+1} = 1$ para todo m e obtemos $\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_p / I_m) = m$.

Seja $m = \text{ord}_{z=0}(f \circ u)(z)$. Como u é log-integral,

$$\begin{aligned} \text{ord}_{z=0}(g \circ u)(z) &= \text{ord}_{z=0}(\partial_v(f) \circ u)(z) = \text{ord}_{z=0}(z(f \circ u)'(z)) \\ &= 1 + \text{ord}_{z=0}(f \circ u)'(z) = 1 + m - 1 = m \end{aligned}$$

Assim, $(f, g)\mathcal{O}_p \subset I_m$ e obtemos um morfismo sobrejetor

$$\frac{\mathcal{O}_p}{(f, g)\mathcal{O}_p} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{O}_p}{I_m}$$

Desta forma,

$$m = \dim(\mathcal{O}_p / I_m) \leq \dim(\mathcal{O}_p / (f, g)\mathcal{O}_p) = i(p, V(f) \cdot V(g)).$$

Referências

- [1] Binyamini, G., *Multiplicity estimates, analytic cycles and Newton polytopes*, preprint <http://arxiv.org/abs/1407.1183>, 2014.
- [2] Bost, J-B., *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields*, Publ. Math. de l'IHES 93, 161-221, 2001.
- [3] Fornæss, J. E. & Sibony, N., *Riemann surface laminations with singularities*, J. Geom. Anal. 18, 400-442, 2008.
- [4] Mahler, K., *On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions*, J. Austral. Math. Soc. 10, 445-450, 1969.
- [5] Nesterenko, V. Y., *Modular functions and transcendence questions*, Sb. Math. 187 1319, 1996.
- [6] Phillipon, P., *Critères pour l'indépendance algébrique*, Publ. Math. de l'IHES 64, 5-52, 1986.