Como calcular trilhões de dígitos de π usando apenas papel, caneta e um supercomputador

Tiago J. Fonseca

IMECC–Unicamp

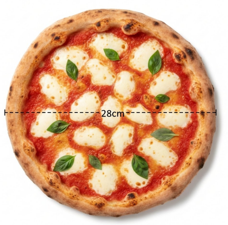
Seminário Bolachinha
Março de 2026

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4
94459230781640628620899862803482534211706798214808651328230
66470938446095505822317253594081284811174502841027019385211
05559644622948954930381964428810975665933446128475648233786
78316527120190914564856692346034861045432664821339360726024
91412737245870066063155881748815209209628292540917153643678
92590360011330530548820466521384146951941511609433057270365
75959195309218611738193261179310511854807446237996274956735
18857527248912279381830119491298336733624406566430860213949
46395224737190702179860943702770539217176293176752384674818
46766940513200056812714526356082778577134275778960917363717
87214684409012249534301465495853710507922796892589235420199
56112129021960864034418159813629774771309960518707211349999
99837297804995105973173281609631859502445945534690830264252
23082533446850352619311881710100031378387528865875332083814
20617177669147303598253490428755468731159562863882353787593
751957781857780532171226806613001927876611195909216420199...

- Definição:

$$\pi = \frac{\text{circunferência}}{\text{diâmetro}} = 3{,}141592\ldots$$

- Exemplo:



Comprimento da borda $= \pi \times 28\text{cm} = 87{,}96\ldots\text{cm}$

Esta palestra **não** é sobre:

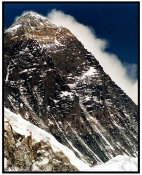
- História.
- Irracionalidade, transcendência.
- Algoritmos, problemas computacionais.
- Supercomputadores.
- "Como calcular trilhões de dígitos de π usando apenas papel, caneta e um supercomputador."

Nesta palestra:

- Três fórmulas surpreendentes para calcular π. A última calcula *trilhões* de dígitos. Recorde: 314 trilhões de dígitos. StorageReview, dezembro de 2025.
- Conexões com outras áreas da matemática.

- Por quê?
- *"Because it's there."*

George Mallory em 1915



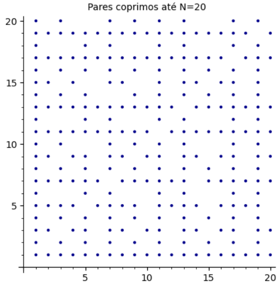
Monte Everest

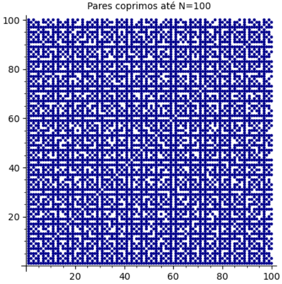
- π é irracional: expansão decimal *infinita* (e não-recorrente).
- Monte Análogo:

"Seu cume deve ser inacessível, mas sua base acessível aos seres humanos tais como a natureza os fez. Deve ser único e deve existir geograficamente. A porta para o invisível deve ser visível."

Primeira fórmula

- Qual é a probabilidade que dois inteiros positivos escolhidos aleatoriamente sejam coprimos?
- Exemplo: $2025 = 3^4 \times 5^2$ e $2026 = 2 \times 1013$ são coprimos, mas $42 = 2 \times 3 \times 7$ e $333 = 3^2 \times 37$ não são.
- "Pontos visíveis a partir da origem"





- Proporção de pares coprimos $\approx 0.607927\ldots$

Argumento informal:

- A probabilidade de um número ser divisível por um primo p é $1/p$
- A probabilidade de dois números serem ambos divisíveis por p é $1/p^2$
- A probabilidade de dois números não terem p como fator comum é $1 - 1/p^2$
- Logo, probabilidade de dois números serem coprimos é:

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\cdots$$

- Exemplo:

$$\prod_{p \leq 100} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = 0.609033725399516$$

- Série geométrica:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p^2)^2} + \frac{1}{(p^2)^3} + \cdots$$

- Produto de Euler (teorema fundamental da aritmética):

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} \right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \zeta(2)$$

- Fórmula de Euler (1735):

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$$

- Probabilidade de dois números serem coprimos:

$$\boxed{\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\cdots = \frac{6}{\pi^2}}$$

Algumas observações:

- Convergência *muito* lenta. Não serve para calcular os dígitos de π na prática.
- Há uma fórmula de Euler para ζ em todo número par:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \ldots$$

  Demonstração: análise complexa ou séries de Fourier.
- É tentador supor que, para todo k,

$$\zeta(k) \stackrel{?}{=} (\text{número racional}) \times \pi^k$$

  mas conjectura-se que isto **não é verdade** para os k ímpares: $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, ... são "constantes novas".
- Apéry (1979): $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$ é irracional.

Segunda fórmula

Seja $a = 1$, $b = 1/\sqrt{2}$ e $t = 1/4$.

- Se $a_1 = (a+b)/2$, $b_1 = \sqrt{ab}$ e $t_1 = t - 2(a_1 - a)^2$, então
$$\frac{(a_1 + b_1)^2}{2t_1} = 3,14057\ldots$$

- Se $a_2 = (a_1 + b_1)/2$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$ e $t_2 = t_1 - 2^2(a_2 - a_1)^2$, então
$$\frac{(a_2 + b_2)^2}{2t_2} = 3,14159246213\ldots$$

- ...
$$\frac{(a_3 + b_3)^2}{2t_3} = 3,14159265358979323827951\ldots$$

18 casas decimais!

- As médias aritmética e geométrica de dois números reais positivos a e b são:

$$\frac{a+b}{2} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{ab}.$$

- Exemplo: se $a = 1$ e $b = 0,2$,

$$\frac{a+b}{2} = 0,6 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{ab} = 0,4472135954\ldots$$

- Defina $a_0 = a$, $b_0 = b$ e considere a sequência

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

- Exemplo (Gauss, 1791):

$a =$	1,00000 00000 00000 00000 0	$b =$	0,20000 00000 00000 00000 0
$a' =$	0,60000 00000 00000 00000 0	$b' =$	0,44721 35954 99957 93928 2
$a'' =$	0,52360 67977 49978 96964 1	$b'' =$	0,51800 40128 22268 36005 0
$a''' =$	0,52080 54052 86123 66484 5	$b''' =$	0,52079 78709 39876 24344 0
$a'''' =$	0,52080 16381 12999 95414 3	$b'''' =$	0,52080 16380 99375
$a^{\text{v}} =$	0,52080 16381 06187	$b^{\text{v}} =$	0,52080 16381 06187

- As sequências de médias aritméticas e geométricas convergem a um mesmo limite, dito *média aritmética-geométrica*:

$$M(a,b) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

  Convergência **quadrática**!
- Exemplo: $M(1\,,\,0,2) = 0,520801638106187\ldots$
- Integrais elípticas (Legendre):

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}\,, \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2\sin^2 t}\,dt.$$

- Fórmula de Lagrange–Gauss:

$$K(x) = \frac{a\pi}{2M(a,b)}, \qquad x = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

- Fórmula para $E(x)$:

$$E(x) = \left(1 - \frac{1}{2a^2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(a_n^2 - b_n^2)\right) K(x)$$

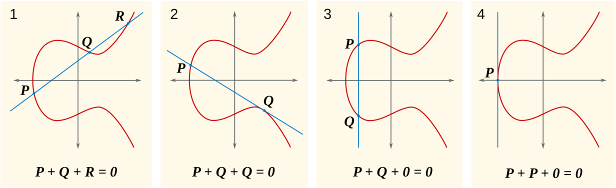
- Relação de Legendre: se $x^2 + y^2 = 1$,

$$K(x)E(y) + K(y)E(x) - K(x)K(y) = \frac{\pi}{2}$$

- Tomando $a = 1$ e $b = 1/\sqrt{2}$ ($x = y = 1/\sqrt{2}$), obtemos a fórmula de Brent-Salamin (1976):

$$\boxed{\pi = \frac{4M(1, 1/\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}(a_n^2 - b_n^2)}}$$

- A média aritmética-geométrica e as integrais elípticas estão fortemente relacionadas com a teoria de **curvas elípticas**.



- Uma variante p-ádica da média aritmética-geométrica pode ser usada para contar pontos em curvas elípticas.

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots , \qquad a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$$

- Aplicações em criptografia.

Terceira fórmula

- Fórmula de Chudnovsky (1988)

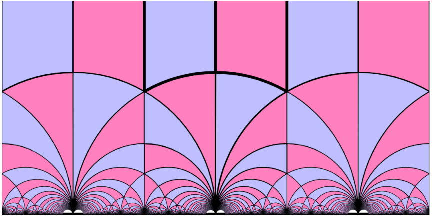
$$\boxed{\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 (640320)^{3k+3/2}}}$$

- Só o primeiro termo ($k = 0$):

$$\frac{640320^{3/2}}{12 \times 13591409} = 3,14159265358973 4207\ldots$$

- Cada novo termo melhora a aproximação em 14 casas decimais! Convergência linear.
- **Esta** é a fórmula usada para bater todos os recordes recentes de dígitos de π.

- Há toda uma família de fórmulas do tipo acima (inicialmente descobertas por Ramanujan).
- Ingredientes principais: teoria de **formas modulares** e **multiplicação complexa** de curvas elípticas.



- Hilbert:

"A teoria da multiplicação complexa não é apenas a parte mais bonita da matemática, mas de toda a ciência."

Obrigado!

$$\boxed{\prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots = \frac{6}{\pi^2}}$$

$$\boxed{\pi = \frac{4M(1, 1/\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}(a_n^2 - b_n^2)}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 (640320)^{3k+3/2}}}$$