Courbes intégrales : transcendance et géométrie

Tiago Jardim da Fonseca

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

12 décembre 2017

Motivation

Le théorème de Nesterenko

Séries d'Eisenstein classiques normalisées ($k \geq 1$ entier)

$$E_{2k}(q) = 1 + (-1)^k \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

vues comme des fonctions holomorphes sur $D = \{q \in \mathbb{C} \mid |q| < 1\}$

- $B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42, \ldots$ nombres de Bernoulli
- $\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}$

Théorème (Nesterenko '96)

Pour tout $z \in D \setminus \{0\}$, on a

$$\operatorname{degtr}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(z, E_2(z), E_4(z), E_6(z)) \geq 3.$$

$z = e^{-2\pi} \implies$ indépendance algébrique de π, e^{π} et $\Gamma(1/4)$.

Ingrédients clés de la preuve de Nesterenko

- **Équations de Ramanujan** :

$$q\frac{dE_2}{dq}=\frac{E_2^2-E_4}{12},\ q\frac{dE_4}{dq}=\frac{E_2E_4-E_6}{3},\ q\frac{dE_6}{dq}=\frac{E_2E_6-E_4^2}{2}$$

- rayon de convergence $=1$ et coefficients de Taylor dans $\mathbb{Z}$.

Plus deux hypothèses :

- *Lemme de zéros* : il existe $C>0$ tel que

$$\mathrm{ord}_{q=0}P(q,E_2(q),E_4(q),E_6(q))\leq C(\deg P)^4$$

  pour tout $P\in\mathbb{C}[X_0,X_1,X_2,X_3]$ non-nul.

- *Croissance polynomiale* en n des $(E_{2k}^{(n)}(0)/n!)_{n\geq 0}$

Questions

- Existe-t-il d'*autres* fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_m : D \to \mathbb{C}$ satisfaisant des propriétés analogues ?
- Nouveaux résultats de transcendance par la même “méthode” ?

Programme :

(a) étude de la méthode en soi

(b) nouveaux exemples d'application

Petit historique :

(a) Philippon '98 (K-fonctions).

(b) Zudilin '00 (symétrie miroir). Difficulté : condition de croissance. Bertrand-Zudilin '01 (Thetanullwerte en plusieurs variables)

Indépendance algébrique de valeurs de courbes intégrales

Dictionnaire

Point de vue classique	**Point de vue géométrique**
Fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_m : D \to \mathbb{C}$	Courbe holomorphe $\varphi : D \to X(\mathbb{C})$, avec $X_{/\mathbb{Q}}$
Éq. diff. à coeffs. dans $\mathbb{Q}$ $q\frac{df_i}{dq} = P_i(f_1, \dots, f_n)$, $1 \leq i \leq m$	Champ de vecteurs $v \in \Gamma(X, T_{X/\mathbb{Q}})$ $q\frac{d\varphi}{dq} = v \circ \varphi$
$a_{i,n} := \frac{f_i^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $n \geq 0$	Modèle entier $\mathcal{X}_{/\mathbb{Z}}$ de X et $\hat{\varphi} : \mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}[\![q]\!] \to \mathcal{X}$
Croissance polynomiale des $(a_{i,n})_{n\geq 0}$	Croissance modérée de φ
Lemme de Zéros	ZL-densité de $\hat{\varphi}_{\mathbb{Q}} : \mathrm{Spf}\, \mathbb{Q}[\![q]\!] \to X$

Croissance modérée (d'après Bost et Randriam)

(M, h) variété hermitienne, $\omega = -\Im h$, $\varphi : D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \to M$ holomorphe

Fonction caractéristique à la Nevanlinna :

$$\begin{aligned} T_\varphi :]0, R[&\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ r &\mapsto \int_0^r \left(\int_{D_t} \varphi^* \omega \right) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Définition

On dit que $\varphi : D_R \to M$ *est à* croissance modérée *s'il existe* $a, b > 0$ *tels que*

$$T_\varphi(r) \leq a + b \log \frac{1}{1 - \frac{r}{R}}$$

pour tout $r \in]0, R[$.

M est compacte $\Rightarrow$ ne dépend pas du choix de h

Coefficients de Taylor et croissance modérée

$R = 1,\ M = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \varphi : D &\longrightarrow \mathbb{A}^m(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \\ z &\mapsto (f_1(z), \ldots, f_m(z)) \end{aligned}$$

coeffs. de Taylor des f_i croissent polynomialement $\Rightarrow \varphi$ à croissance modérée.

Remarque :

$$\begin{aligned} J : D &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ q &\mapsto 1728 \frac{E_4^3(q)}{E_4^3(q) - E_6^2(q)} = \sum_{n \geq -1} c(n) q^n \end{aligned}$$

est à croissance modérée, mais $c(n) \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2} n^{3/4}}$ (Rademacher-Petersson).

ZL-densité

k corps, X k-variété algébrique, $\hat{\varphi} : \mathrm{Spf}\, k[\![q]\!] \to X$ courbe formelle

Soit D un diviseur de Cartier *effectif* sur X d'équation locale $f \in \mathcal{O}_{X,\hat{\varphi}(0)}$, on pose

$$\mathrm{mult}_{\hat{\varphi}} D := \mathrm{ord}_{q=0} \hat{\varphi}^* f \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Supposons de plus : X projective munie de L ample.

Définition

On dit que $\hat{\varphi}$ *est* ZL-dense *s'il existe* $C > 0$ *telle que*

$$\mathrm{mult}_{\hat{\varphi}} D \leq C(\deg_L D)^{\dim X}$$

pour tout diviseur de Cartier effectif D *sur* X.

Ne dépend pas du choix de L.

Lemme de zéros

- Sur $\mathbb{P}^n_k$, tout diviseur de Cartier D est donné par $P \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogène et $\deg_{\mathcal{O}(1)} D = \deg P$.
- **Exemple** : le "lemme de zéros" de Nesterenko équivaut à dire que

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} : \operatorname{Spf} \mathbb{C}[\![q]\!] &\longrightarrow \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}} \\ q &\mapsto (q, E_2(q), E_4(q), E_6(q))\end{aligned}$$

  est ZL-dense.

Invariance birationnelle

Théorème

Soit $f : X \to Y$ un morphisme birationnel entre $\mathbb{C}$-variétés algébriques projectives lisses. Une application holomorphe $\varphi : D_R \to X(\mathbb{C})$ dont l'image est Zariski-dense est à croissance modérée si, et seulement si, $f \circ \varphi : D_R \to Y(\mathbb{C})$ est à croissance modérée.

Théorème

Soit $f : X \to Y$ un k-morphisme propre et $U \subset Y$ un ouvert tel que $f : f^{-1}(U) \to U$ est un isomorphisme. Alors une courbe formelle $\hat{\varphi} : \mathrm{Spf}\, k[\![q]\!] \to f^{-1}(U) \subset X$ telle que $\hat{\varphi}(0)$ est un point régulier de X est ZL-dense dans X si et seulement si $f \circ \hat{\varphi}$ est ZL-dense dans Y.

Croissance modérée et ZL-densité pour les variétés quasi-projectives !

Naturalité

Théorème (Brunella '05)

Soit $d \geq 2$. Il existe un ouvert de Zariski $U \subset \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(d-1) \otimes T_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}})$ tel que toute courbe $\varphi : D_R \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ intégrale d'un feuilletage dans U est à croissance modérée.

Théorème (d'après Binyamini '14)

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, X une k-variété quasi-projective lisse, $v \in \Gamma(X, T_{X/k}) \setminus \{0\}$ et $\hat{\varphi} : \mathrm{Spf}\, k[\![q]\!] \to X$ lisse satisfaisant l'équation différentielle

$$q\frac{d\hat{\varphi}}{dq} = v \circ \hat{\varphi}$$

Si $\hat{\varphi}$ satisfait la D-propriété de Nesterenko pour le feuilletage engendré par v (e.g. X admet au plus un nombre fini de sous-variétés v-invariantes), alors $\hat{\varphi}$ est ZL-dense.

Généralisation géométrique de la méthode de Nesterenko

- K corps de nombres, $\mathcal{X}$ schéma arithmétique quasi-projectif sur $\mathcal{O}_K$ de dim. rel. $n \geq 2$ et fibre générique $\mathcal{X}_K$ lisse
- $\hat{\varphi} : \mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_K[\![q]\!] \to \mathcal{X}$ tel que, pour tout $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\hat{\varphi}_\sigma : \mathrm{Spf}\, \mathbb{C}[\![q]\!] \to \mathcal{X}_\sigma$ se relève en $\varphi_\sigma : D_{R_\sigma} \to \mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})$ holomorphe

Théorème

Supposons que $\prod_\sigma R_\sigma = 1$ et qu'il existe $v \in \Gamma(\mathcal{X}_K, T_{\mathcal{X}_K/K}) \setminus \{0\}$ tel que $\hat{\varphi}_K : \mathrm{Spf}\, K[\![q]\!] \to \mathcal{X}_K$ satisfait $q\frac{d\hat{\varphi}_K}{dq} = v \circ \hat{\varphi}_K$. Si de plus :

1. *la courbe formelle $\hat{\varphi}_K$ est ZL-dense dans $\mathcal{X}_K$, et*
2. *$\varphi_\sigma : D_{R_\sigma} \to \mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})$ est à croissance modérée pour tout σ*

alors, pour tout $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, et tout $z \in D_{R_\sigma} \setminus \{0\}$, le corps de définition $K(\varphi_\sigma(z))$ du point complexe $\varphi_\sigma(z)$ dans $\mathcal{X}_K$ satisfait

$$\mathrm{degtr}_K K(\varphi_\sigma(z)) \geq n - 1.$$

Remarques

- Démonstration basée sur le critère d'indépendance algébrique de Philippon '86. Ayant fixé L sur $\overline{\mathcal{X}}$ ample sur $\overline{\mathcal{X}}_K$, il suffit de construire une suite $s_d \in \Gamma(\overline{\mathcal{X}}, L^{\otimes j_d})$ telle que j_d et $\log \|s_d\|$ ne "croissent pas très vite", alors que

$$-ad^n \leq \log \|s_\sigma(\varphi_\sigma(z))\| \leq -bd^n$$

  pour certains $a > b > 0$.
- Techniques : estimées de jets et méthode de pentes en théorie d'Arakelov.
- Analogue "hyperbolique" des méthodes "paraboliques" de Siegel-Shidlovsky et Schneider-Lang.
- Existe-t-il des exemples non-modulaires ? (preuve marche aussi pour $\frac{d}{dq}$ mais aucun exemple)

Équations de Ramanujan supérieures

1. Comprendre les équations de Ramanujan géométriquement e généraliser ?

$$q\frac{dE_2}{dq} = \frac{E_2^2 - E_4}{12},\ q\frac{dE_4}{dq} = \frac{E_2E_4 - E_6}{3},\ q\frac{dE_6}{dq} = \frac{E_2E_6 - E_4^2}{2}$$

2. Bertrand-Zudilin '01 : *Thetanullwerte*.
3. Deligne '70 : dérivée de Serre est "donnée" par la connexion de Gauss-Manin sur la cohomologie de de Rham de la courbe elliptique universelle.
4. Point de vue de Movasati '10 : champ de vecteurs sur un certain espace de modules.

Bases Hodge-symplectiques

(X, λ) schéma abélien principalement polarisé (s.a.p.p) sur une base S de dim. rel. g et morphisme structurel $p : X \to S$.

Fait : $H^1_{\mathrm{dR}}(X/S)$ est un $\mathcal{O}_S$-module libre de rang 2g muni d'une "forme symplectique" $\langle\ ,\ \rangle_\lambda : H^1_{\mathrm{dR}}(X/S) \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(X/S) \to \mathcal{O}_S$ et d'un sous-fibré $F^1(X/S) = p_*\Omega^1_{X/S}$ de rang g.

Définition

Une base Hodge-symplectique *de* $(X, \lambda)_{/S}$ *est une trivialisation* $b = (\omega_1, \ldots, \omega_g, \eta_1, \ldots, \eta_g)$ *de* $H^1_{\mathrm{dR}}(X/S)$ *telle que :*

1. $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ *trivialise* $F^1(X/S)$ *;*
2. b *est symplectique par rapport à* $\langle\ ,\ \rangle_\lambda$

Le champ de modules $\mathcal{B}_g$

Fixons $g \geq 1$ entier. Soit

$$\mathcal{B}_g = \begin{array}{l}\text{champ de modules classifiant les s.a.p.p de dim. rel. } g \text{ munis d'une} \\ \text{base Hodge-symplecticque } (X, \lambda, b)_{/S}\end{array}$$

Proposition

Le champ $\mathcal{B}_g$ est un champ de Deligne-Mumford lisse sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ de dimension relative $2g^2 + g$.

$\mathcal{B}_g$ est un fibré principal sur $\mathcal{A}_g$ pour le *sous-groupe parabolique de Siegel*

$$P_g = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} \leq \mathrm{Sp}_{2g}$$

de dimension $2g^2 + g - g(g+1)/2 = g(3g+1)/2$.

Champs de vecteurs de Ramanujan supérieurs $(v_{ij})_{1\leq i\leq j\leq g}$

Soit $(\mathcal{X}_g, \lambda_g)$ le s.a.p.p universel sur $\mathcal{B}_g$ et $(\omega_1, \dots, \omega_g, \eta_1, \dots, \eta_g)$ la base Hodge-symplectique universelle.

Théorème

Le morphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_{g,\text{ét}}}$-modules cohérents

$$\begin{aligned} c_g : T_{\mathcal{B}_g/\mathbb{Z}} &\longrightarrow \Gamma^2(F^1(\mathcal{X}_g/\mathcal{B}_g)^\vee) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}_g/\mathcal{B}_g)^{\oplus g} \\ \theta &\mapsto (\kappa(\theta), \nabla_\theta \eta_1, \dots, \nabla_\theta \eta_g) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme de $T_{\mathcal{B}_g/\mathbb{Z}}$ sur $\Gamma^2(F^1(\mathcal{X}_g/\mathcal{B}_g)^\vee) \oplus \mathcal{S}_g$, où $\mathcal{S}_g$ est un sous-fibré de $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathcal{X}_g/\mathcal{B}_g)^{\oplus g}$.

Pour $1 \leq i \leq j \leq g$, v_{ij} est l'unique section globale de $T_{\mathcal{B}_g/\mathbb{Z}}$ telle que

$$c_g(v_{ij}) = \begin{cases} (\omega_i^\vee \otimes \omega_i^\vee, 0) & i = j \\ (\omega_i^\vee \otimes \omega_j^\vee + \omega_j^\vee \otimes \omega_i^\vee, 0) & i < j \end{cases}$$

Représentabilité

Théorème

Pour tout entier $g \geq 1$, le champ $\mathcal{B}_g \otimes \mathbb{Z}[1/2]$ est représentable par un schéma quasi-projective lisse B_g sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/2]$.

Idée : k corps parfait de caractéristique $p > 2 \Rightarrow$ base de $H^1_{\mathrm{dR}}(X/k)$ "rigidifie" $(X, \lambda)_{/k}$:

- Oda '69 : module de Dieudonné associé à $X[p]$ est canoniquement isomorphe à $H^1_{\mathrm{dR}}(X/k)$.
- Lemme de Serre : si $n \geq 3$, la n-torsion "rigidifie" $(X, \lambda)_{/k}$.

Proposition

$B_1 \otimes \mathbb{Z}[1/6]$ s'identifie à $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/6, e_2, e_4, e_6, (e_4^3 - e_6^2)^{-1}]$ et

$$v_{11} = \frac{e_2^2 - e_4}{12} \frac{\partial}{\partial e_2} + \frac{e_2 e_4 - e_6}{3} \frac{\partial}{\partial e_4} + \frac{e_2 e_6 - e_4^2}{2} \frac{\partial}{\partial e_6}$$

Équations de Ramanujan supérieures

Notations :

- $\mathbb{H}_g = \{\tau \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \mid \Im\tau > 0\}$ demi-espace de Siegel
- $\theta_{kl} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \tau_{kl}}$, $1 \leq k \leq l \leq g$
- $(\mathbb{X}_g, E_g)$ le "s.a.p.p. universel" sur $\mathbb{H}_g$: $\mathbb{X}_{g,\tau} = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$.

Considérons les sections holomorphes globales de $\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{X}_g/\mathbb{H}_g)$

$$\omega_k := 2\pi i\, dz_k, \qquad \eta_k := \nabla_{\theta_{kk}}\omega_k$$

Si $\gamma_i \in H_1(\mathbb{X}_{g,\tau}, \mathbb{Z})$ (resp. $\delta_i \in H_1(\mathbb{X}_{g,\tau}, \mathbb{Z})$) correspond à e_i (resp. $\tau \mathrm{e}_i$),

$$\begin{pmatrix} (\int_{\delta_i} \eta_j)_{1\leq i,j\leq g} & (\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_i} \omega_j)_{1\leq i,j\leq g} \\ (\int_{\gamma_i} \eta_j)_{1\leq i,j\leq g} & (\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i} \omega_j)_{1\leq i,j\leq g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_g & \tau \\ 0 & 1_g \end{pmatrix}$$

Théorème

La famille $(\omega_1, \ldots, \omega_g, \eta_1, \ldots, \eta_g)$ *est une base Hodge-symplectique de* $(\mathbb{X}_g, E_g)_{/\mathbb{H}_g}$ *et l'application holomorphe induite*

$$\varphi_g : \mathbb{H}_g \longrightarrow B_g(\mathbb{C})$$

satisfait le système d'équations aux dérivées partielles

$$\theta_{kl}\varphi_g = v_{kl} \circ \varphi_g, \quad 1 \leq k \leq l \leq g$$

Proposition

Sous l'identification $B_1 \otimes \mathbb{Z}[1/6] \cong \mathbb{Z}[1/6, e_2, e_4, e_6, (e_4^3 - e_6^2)^{-1}]$,

$$\varphi_1(\tau) = (E_2(e^{2\pi i\tau}), E_4(e^{2\pi i\tau}), E_6(e^{2\pi i\tau}))$$

Remarque : φ_g ne dépend que des $q_{kl} = e^{2\pi i\tau_{kl}}$

Valeurs de séries d'Eisenstein et périodes de courbes elliptiques

- On a

$$E_2(e^{2\pi i\tau}) = 12\left(\frac{\omega_1}{2\pi i}\right)\left(\frac{\eta_1}{2\pi i}\right), \quad E_4(e^{2\pi i\tau}) = 12g_2\left(\frac{\omega_1}{2\pi i}\right)^4$$

$$E_6(e^{2\pi i\tau}) = -216g_3\left(\frac{\omega_1}{2\pi i}\right)^6$$

  où $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ est une éq. de Weierstrass pour $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ définie sur $\mathbb{Q}(j(\tau))$.

- "Nesterenko" $\Longrightarrow$ "Chudnovsky"

Valeurs de φ_g et périodes de variétés abéliennes

$X_{/\mathbb{C}}$ variété abélienne, $k \subset \mathbb{C}$ le plus petit sous-corps algébriquement clos pour lequel il existe $X_{0/k}$ tel que $X = X_0 \otimes_k \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X) &= \text{corps de périodes de } X_{0/k}\\ &= k\left(\int_\gamma \alpha\right), \text{ où } \alpha \in H^1_{\mathrm{dR}}(X_0/k),\ \gamma \in H_1(X_0(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Théorème

Pour tout $\tau \in \mathbb{H}_g$, le corps $\mathcal{P}(\mathbb{X}_{g,\tau})$ est une extension algébrique de

$$\mathbb{Q}(2\pi i, \tau, \varphi_g(\tau)),$$

corps de définition du point complexe $(2\pi i, \tau, \varphi_g(\tau))$ de la $\mathbb{Q}$-variété $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \times \mathrm{Sym}_{g,\mathbb{Q}} \times B_{g,\mathbb{Q}}$.

Transcendance

Généralisation en plusieurs variables de Nesterenko $\overset{?}{\Longrightarrow}$ CPG pour les variétés abéliennes

Conjecture (Grothendieck-André)

Pour toute variété abélienne complexe X, on a

$$\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}} \mathcal{P}(X) \geq \dim MT(X).$$

Théorème

Le graphe de φ_g

$$\{(\tau, \varphi_g(\tau)) \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \times B_g(\mathbb{C}) \mid \tau \in \mathbb{H}_g\}$$

est Zariski-dense dans $\mathrm{Sym}_{g,\mathbb{C}} \times B_{g,\mathbb{C}}$.

"Il n'y a pas de relation algébrique simultanément satisfaite par les périodes de toutes les v.a.p.p. outre celles induites par les données de polarisation."

Questions et directions

- Lien précis avec Bertrand-Zudilin ? Dérivées de formes quasi-modulaires de Siegel
- Intégralité de φ_g en les q_{ij} ? Travaux de Mumford sur les dégénérescences des v.a., formes quasi-modulaires sur $\mathbb{Z}$
- Lier avec la partie 1 : bon énoncé ? Prendre en compte sous-variétés spéciales
- Constructions analogues pour les variétés de Shimura PEL ? e.g., en $g = 2$ surfaces modulaires de Hilbert, courbes de Shimura

Merci