Variáveis Complexas

MM413 – 1º semestre de 2026

Tiago J. Fonseca*

Sumário

Introdução **5**

Notas de aula **7**

Aula 1 **7**

0) Notações 9

1) Funções holomorfas 11

Aula 2 **13**

2) Equações de Cauchy–Riemann 13

3) Séries de potências 15

Aula 3 **18**

3) Séries de potências (cont.) 18

4) Caminhos e curvas 19

5) Integração em caminhos 21

Aula 4 **23**

5) Integração em caminhos (cont.) 23

6) Teorema de Goursat 25

Aula 5 **28**

7) Primitivas locais 28

*Notas digitalizadas com o auxílio de inteligência artificial a partir do manuscrito do professor, sem revisão cuidadosa; veja a Introdução.

Aula 6 **33**
8) Fórmula integral de Cauchy 33

Aula 7 **39**
9) Princípio da continuação analítica 39
10) Limites de funções holomorfas 41

Aula 8 **43**
10) Limites de funções holomorfas (cont.) 43

Aula 9 **47**
10) Limites de funções holomorfas (cont.) 47
11) Funções holomorfas definidas por integrais 47

Aula 10 **50**
12) Teorema de aproximação de Runge 50

Aula 11 **54**
13) Zeros e polos 54

Aula 12 **58**
13) Zeros e polos (cont.) 58
14) A fórmula de resíduos 58

Aula 13 **62**
14) A fórmula de resíduos (cont.) 62

Aula 14 **65**
15) Tipos de singularidade 65
16) Funções meromorfas 67

Aula 15 **69**
16) Funções meromorfas (cont.) 69

Aula 16 **73**
17) A esfera de Riemann 73

Aula 17 **76**
18) O princípio do argumento 76

Aula 18 **80**
18) O princípio do argumento (cont.) 80
19) Homotopia 80

Aula 19 **84**
20) O logaritmo complexo 84

Aula 20 **87**
20) O logaritmo complexo (cont.) 87

Aula 21 **90**
21) Aplicações conformes 90

Aula 22 **94**
22) O disco 94

Aula 23 **98**
22) O disco (cont.) 98
23) O teorema da aplicação de Riemann: enunciado 98

Aula 24 **101**
24) O teorema de Montel 101
25) Demonstração do teorema da aplicação de Riemann 103

Aula 25 **105**
25) Demonstração do teorema da aplicação de Riemann (cont.) . . 105

Aula 26 **108**
26) Funções harmônicas 108
27) O problema de Dirichlet e o núcleo de Poisson 110

Aula 27 **112**
27) O problema de Dirichlet e o núcleo de Poisson (cont.) 112
28) O teorema dos números primos (enunciado) 114

Aula 28 **118**
29) O teorema dos números primos (ideia da demonstração) 118

Provas **124**

Prova 1 (15/04/2026) **124**

Prova 2 (24/06/2026) **129**

Anexo **133**

Introdução

Estas são as notas de aula da disciplina *MM413 – Variáveis Complexas*, oferecida no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp no primeiro semestre de 2026. Cada seção destas notas corresponde a uma aula.

Conteúdo. O objeto central do curso são as *funções holomorfas* de uma variável complexa: funções $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que admitem derivada no sentido complexo. Essa condição, aparentemente análoga à diferenciabilidade em uma variável real, é muito mais rígida: veremos que toda função holomorfa é infinitamente diferenciável, é dada localmente por uma série de potências e é determinada pelos seus valores em qualquer subconjunto com um ponto de acumulação. A ferramenta principal é a *teoria de integração de Cauchy* — o teorema de Cauchy, a fórmula integral de Cauchy e suas consequências (estimativas de Cauchy, teorema de Liouville, teorema de Morera, princípio da continuação analítica).

Em seguida estudamos singularidades, séries de Laurent, funções meromorfas e o cálculo de resíduos, com aplicações ao cálculo de integrais e somas de séries. Um fio condutor do curso são as funções especiais: a função Γ e a função ζ de Riemann, sua continuação analítica e sua equação funcional, e a relação com os números primos. Tratamos também do logaritmo complexo, das aplicações conformes (isto é, que preservam ângulos), do lema de Schwarz e dos automorfismos do disco, do *teorema da aplicação de Riemann* e das funções harmônicas (problema de Dirichlet e núcleo de Poisson). O curso termina com o *teorema dos números primos* e uma ideia da sua demonstração.

Ao final, incluímos as duas provas do curso, com os respectivos gabaritos, e, como anexo, notas curtas com uma abordagem mais geométrica (via formas diferenciais e o teorema de Stokes) da fórmula integral de Cauchy e do teorema fundamental da álgebra.

Ementa oficial. Segundo o catálogo da Unicamp, a ementa da disciplina MM413 é:

> Números complexos. Funções analíticas. Séries. Integração complexa. Teorema de Cauchy. Teorema de Liouville. Princípio do módulo máximo. Resíduos. Desenvolvimento em séries de Taylor e Laurent. Funções harmônicas. Fórmula de Poisson. Teorema de Runge. Teorema da aplicação de Riemann.

Vários tópicos abordados no curso vão além dessa ementa, em especial os ligados às funções especiais: produtos infinitos e o produto de Euler, a função

Γ, a função ζ de Riemann (sua continuação analítica, sua equação funcional e seus zeros), os números de Bernoulli e os valores $\zeta(2k)$, e o teorema dos números primos com a ideia da sua demonstração. Esses tópicos foram incluídos para ilustrar a teoria geral com exemplos centrais da matemática.

Bibliografia. O curso seguiu como referência principal o livro

[1] E. M. Stein e R. Shakarchi, *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, Princeton, 2003.

Para as funções especiais (Γ, ζ e muitas outras), o clássico insuperável é

[2] E. T. Whittaker e G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 5ª ed., editada por V. H. Moll. Cambridge University Press, Cambridge, 2021.

Sobre estas notas. Estas são *notas de aula*: elas reproduzem o que foi feito em sala, e por isso o estilo é casual e informal, com demonstrações às vezes apenas esboçadas e detalhes deixados como exercício. Elas não pretendem ser tão completas nem tão cuidadosas quanto um livro-texto; para isso, recomendamos a bibliografia acima.

Atenção: estas notas foram digitalizadas com o auxílio de inteligência artificial a partir do manuscrito usado em sala de aula, e **não foram revisadas cuidadosamente** pelo autor. Elas certamente contêm erros, tanto de transcrição quanto matemáticos, e devem ser lidas com cautela. Correções e sugestões são bem-vindas.

Agradecimentos. Agradeço a Waleed Noor por ter disponibilizado as suas notas de aula de Variáveis Complexas, nas quais também me baseei para preparar este curso.

Notas de aula

Aula 1

Introdução. Algumas motivações para o curso:[1]

- Para $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$, valem as expansões em série

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots.$$

  A primeira função não está definida em $x = 1$, mas a segunda está definida (e é infinitamente diferenciável) em toda a reta. Por que a sua série também só converge para $|x| < 1$? A resposta aparece quando olhamos para $1/(1+z^2)$ como função de uma variável *complexa* z: ela tem singularidades em $z = \pm i$, que estão a distância 1 da origem.

- Partições de $\mathbb{N}$ em progressões aritméticas (veja abaixo).

Teorema. *Não é possível escrever o conjunto* $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}$ *como uma união disjunta de um número finito* $n \geqslant 2$ *de progressões aritméticas infinitas com razões duas a duas distintas.*

Note que, se permitirmos razões iguais, isso é fácil: por exemplo, $\mathbb{Z}_{>0}$ é a união disjunta dos pares e dos ímpares, ambos de razão 2. A demonstração abaixo usa, de maneira essencial, números complexos.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que

$$\mathbb{Z}_{>0} = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_n, \qquad S_i = \{a_i,\ a_i + d_i,\ a_i + 2d_i,\ \dots\},$$

com $a_i, d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$. Note que $d_i \geqslant 2$ para todo i: se alguma razão fosse 1, a progressão correspondente conteria todos os inteiros a partir de um certo ponto, e as outras $n - 1 \geqslant 1$ progressões (infinitas e disjuntas dela) não caberiam no complementar, que é finito.

Para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$, todas as séries abaixo convergem absolutamente, e podemos reagrupar os termos da série $\sum_{m \geqslant 1} z^m$ segundo a partição:

$$\sum_{m=1}^{\infty} z^m = \sum_{m \in S_1} z^m + \cdots + \sum_{m \in S_n} z^m.$$

Somando as séries geométricas, obtemos

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \cdots + \frac{z^{a_n}}{1-z^{d_n}} \qquad \text{para todo } |z| < 1. \qquad (*)$$

[1] Veja R. E. Rodríguez, I. Kra e J. P. Gilman, *Complex Analysis: In the Spirit of Lipman Bers*, 2ª ed., Springer, 2013, §1.1, e o Exercício 22 do Capítulo 1 de Stein–Shakarchi.

Seja $\omega = e^{2\pi i/d_n}$, uma raiz d_n-ésima primitiva da unidade, e faça $z = t\omega$ com $t \in (0,1)$, $t \to 1^-$. Então:

- como $d_n \geqslant 2$, temos $\omega \neq 1$, logo o lado esquerdo de $(*)$ converge para $\omega/(1-\omega)$;
- para $i < n$, temos $0 < d_i < d_n$, logo $\omega^{d_i} \neq 1$ e o i-ésimo termo do lado direito converge para $\omega^{a_i}/(1-\omega^{d_i})$;
- mas $\omega^{d_n} = 1$, e o último termo satisfaz

$$\left|\frac{(t\omega)^{a_n}}{1-(t\omega)^{d_n}}\right| = \frac{t^{a_n}}{1-t^{d_n}} \longrightarrow +\infty.$$

Assim, quando $t \to 1^-$, o lado esquerdo de $(*)$ e os $n-1$ primeiros termos do lado direito têm limites finitos, enquanto o último termo explode, o que contradiz $(*)$. □

A mesma ideia mostra um pouco mais: numa partição de $\mathbb{Z}_{>0}$ em finitas progressões aritméticas, a maior razão aparece pelo menos duas vezes.

Panorama do curso. Os principais assuntos do curso serão:

- *Funções holomorfas* (analíticas) em uma variável $z \in \mathbb{C}$: funções deriváveis no sentido complexo. Essa condição equivale às equações de Cauchy–Riemann e é muito mais forte que a diferenciabilidade real: veremos que toda função holomorfa é infinitamente diferenciável e localmente dada por uma série de potências (Aulas 1–3 e 6).
- *Integração complexa:* a teoria de Cauchy, isto é, o estudo de integrais

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

ao longo de curvas γ no plano complexo. Os resultados centrais são o teorema de Cauchy ($\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para curvas fechadas, sob hipóteses adequadas) e a fórmula integral de Cauchy, que recupera os valores de f no interior de um disco a partir dos seus valores no bordo. Daí saem o teorema de Liouville, o teorema fundamental da álgebra e o princípio da continuação analítica (Aulas 4–7).



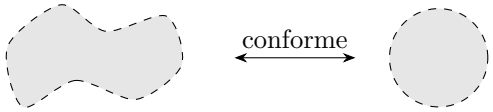
- *Séries de Taylor e de Laurent:*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

  As séries de Laurent, que admitem potências negativas, descrevem f perto de uma singularidade isolada; o coeficiente a_{-1} é o *resíduo*.

- *Singularidades e funções meromorfas.* Classificaremos as singularidades isoladas (removíveis, polos e essenciais) e estudaremos as funções meromorfas, como $\operatorname{cotg}(z)$, $\Gamma(s)$ e $\zeta(s)$. O teorema dos resíduos permite calcular integrais reais e somas de séries, por exemplo $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2 = \pi^2/6$; o princípio do argumento e o teorema de Rouché permitem contar zeros (Aulas 11–18).

- *Teorema da aplicação de Riemann:* todo aberto simplesmente conexo próprio de $\mathbb{C}$ é conformemente equivalente ao disco unitário. Para chegar lá, estudaremos o logaritmo complexo, as aplicações conformes, o lema de Schwarz e os automorfismos do disco, e usaremos famílias normais e o teorema de Montel (Aulas 19–25). Em seguida, veremos as funções harmônicas e o problema de Dirichlet (Aulas 26–27).



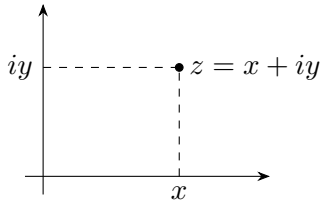
- *A função ζ de Riemann e o teorema dos números primos* (TNP):

$$\#\{p \text{ primo} : p \leqslant x\} \sim \frac{x}{\log x}, \qquad x \to \infty.$$

  A função $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ será um exemplo recorrente: veremos o produto de Euler, sua continuação analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sua equação funcional, os valores $\zeta(2k)$ e o enunciado da hipótese de Riemann. O curso termina com a ideia da demonstração do TNP, cujo ponto-chave é que $\zeta(s) \neq 0$ na reta $\operatorname{Re}(s) = 1$ (Aulas 7–9, 15, 20 e 27–28).

0) Notações

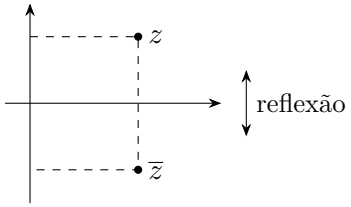
- O *plano complexo* é denotado $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$.



- A *parte real* de z é denotada $x = \mathrm{Re}(z)$ e a sua *parte imaginária*, $y = \mathrm{Im}(z)$.
- O conjunto $\mathbb{C}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra com a regra $i^2 = -1$. Verifica-se ainda que $\mathbb{C}$ é um corpo.
- A *conjugação complexa* é a operação

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z = x + iy \longmapsto \overline{z} = x - iy,$$

que corresponde geometricamente a uma reflexão no eixo real.



- O *módulo* (ou *valor absoluto*) de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ é o número real $\geqslant 0$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

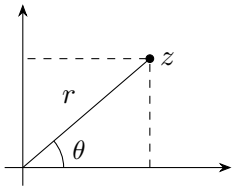
As partes real e imaginária de z também se escrevem em termos da conjugação complexa:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

- A *forma polar* de um número complexo $z \neq 0$ é uma expressão da forma $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$, onde

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta).$$

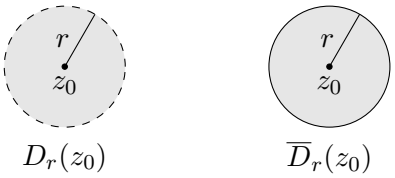
Aqui, $r = |z|$ é o módulo de z e $\theta = \arg(z)$ é o seu *argumento*. Note que θ não é único: todo número da forma $\theta + 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$, também é um argumento de z.



A forma polar é útil em problemas multiplicativos, pois $re^{i\theta} \cdot se^{i\varphi} = rs\,e^{i(\theta+\varphi)}$.

- O *disco aberto* de raio r e centro z_0 e o *disco fechado* correspondente são denotados

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, \qquad \overline{D}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}.$$



$D_r(z_0)$ $\qquad$ $\overline{D}_r(z_0)$

O *disco unitário* é denotado $\mathbb{D} = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

- O *círculo* de raio r e centro z_0 é a fronteira de $D_r(z_0)$:

$$C_r(z_0) = \partial D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é um subconjunto limitado, denotamos o seu *diâmetro* por

$$\operatorname{diam}(\Omega) = \sup_{z,w \in \Omega} |z - w|.$$

1) Funções holomorfas

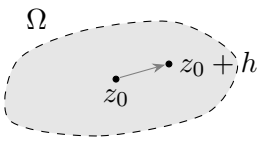
Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função.

Definição 1.1. Dizemos que f é *holomorfa* em $z_0 \in \Omega$ se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Neste caso, $f'(z_0)$ é a *derivada* ("no sentido complexo") de f em z_0.

No limite acima, h é um *número complexo* tendendo a zero, e o quociente é um quociente de números complexos! Esta noção de derivada é *diferente* da derivada de funções de várias variáveis reais.



Observação 1.2. A função f é holomorfa em z_0 se, e somente se, existe $a \in \mathbb{C}$ (a posteriori, $a = f'(z_0)$) tal que

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ah + o(h), \qquad h \to 0.$$

Lembremos que $o(h)$ denota uma função $\varphi(h)$ tal que $\varphi(h)/h \to 0$ quando $h \to 0$.

Definição 1.3. Dizemos que f é *holomorfa em* Ω se é holomorfa em todo $z_0 \in \Omega$. Uma função holomorfa em todo o plano complexo ($\Omega = \mathbb{C}$) é dita *inteira*.

Exemplo 1.4.

1. Os polinômios $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ são funções inteiras, com
$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}.$$
2. A função $f(z) = 1/z$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f'(z) = -1/z^2$.
3. A função $f(z) = \overline{z}$ *não* é holomorfa (em nenhum ponto), pois
$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$
não converge quando $h \to 0$: se $h \to 0$ no eixo real, o limite é 1; se $h \to 0$ no eixo imaginário, o limite é -1.

Os dois primeiros exemplos se verificam diretamente a partir da definição, com os mesmos argumentos do Cálculo 1.

Proposição 1.5 (Operações algébricas)**.** *Se f, g são holomorfas em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, então $f + g$ e $f \cdot g$ são holomorfas em Ω e*
$$(f + g)' = f' + g', \qquad (f \cdot g)' = f'g + fg'.$$
Se $g(z_0) \neq 0$, então f/g é holomorfa em uma vizinhança de z_0 e
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Demonstração. Como no Cálculo 1. □

Observação 1.6. O conjunto
$$\mathcal{O}(\Omega) = \{f \colon \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ holomorfa}\}$$
é um anel (comutativo, com unidade). Veremos que, quando Ω é conexo, $\mathcal{O}(\Omega)$ é um domínio!

Proposição 1.7 (Composição)**.** *Se $f \colon \Omega \to U \subseteq \mathbb{C}$ e $g \colon U \to \mathbb{C}$ são holomorfas, então $g \circ f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e*
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Demonstração. Como no Cálculo 1. □

Aula 2

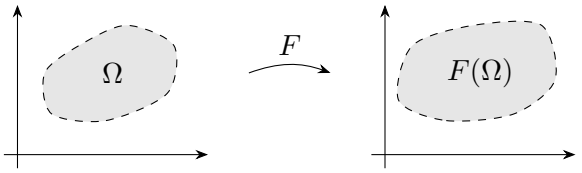
2) Equações de Cauchy–Riemann

Como $\mathbb{C}$ se identifica a $\mathbb{R}^2$ via $x+iy \mapsto (x,y)$, toda função

$$f = u + iv \colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad u = \mathrm{Re}(f),\ v = \mathrm{Im}(f),$$

se identifica a uma aplicação

$$F = (u,v) \colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y)).$$



Lembremos que F é *diferenciável* em $P_0 = (x_0, y_0)$ se

$$F(P_0 + H) = F(P_0) + J(H) + o(|H|), \qquad H \to 0,$$

para alguma transformação linear $J \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; aqui, $|H|$ denota a norma euclidiana de $H \in \mathbb{R}^2$. Nestas condições, J é única e representada pela *matriz jacobiana*

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(P_0) \end{pmatrix}.$$

Agora, se f é holomorfa em $z_0 = x_0 + iy_0$, então segue da Observação 1.2 que F é diferenciável em P_0, e J é a transformação linear dada pela multiplicação por $f'(z_0)$ (sob a identificação $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, com $H = (h_1, h_2)$ correspondendo a $h = h_1 + ih_2$). Se $f'(z_0) = a + ib$, então

$$(a+ib)(h_1 + ih_2) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2),$$

ou seja, em termos de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(P_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(P_0) \end{pmatrix}.$$

Comparando as entradas, obtemos as *equações de Cauchy–Riemann* (CR) no ponto P_0:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.}$$

Observação 2.1.

- $\det(J) = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2$.
- Se f é holomorfa e $f' \neq 0$, então F é *conforme*, isto é, preserva ângulos (sua derivada em cada ponto é a composição de uma rotação com uma homotetia).
- Das equações acima,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(P_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(P_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(P_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(P_0). \end{aligned}$$

É conveniente reformular as equações de Cauchy–Riemann em termos dos *operadores de Cauchy–Riemann* (ou *derivadas de Wirtinger*):

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Se f é holomorfa em z_0, então

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0) \ \left(= 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0)\right).$$

A equação $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ é equivalente às equações de Cauchy–Riemann.

Teorema 2.2. *Seja $f = u+iv\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Se u, v são de classe C^1 e satisfazem as equações de Cauchy–Riemann, então f é holomorfa e $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.*

Demonstração. Como u, v são C^1 (em particular, diferenciáveis), temos, para $h = h_1 + ih_2 \to 0$,

$$\begin{aligned} u(x + h_1, y + h_2) &= u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2 + o(|h|), \\ v(x + h_1, y + h_2) &= v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2 + o(|h|). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(z + h) &= u(x + h_1, y + h_2) + iv(x + h_1, y + h_2) \\ &= f(z) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)h_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)h_2 + o(|h|). \end{aligned}$$

Usando as equações de Cauchy–Riemann, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, obtemos

$$f(z + h) = f(z) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1 + ih_2) + o(|h|).$$

Portanto f é holomorfa e

$$f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

onde a última igualdade segue também das equações de Cauchy–Riemann.[2] □

3) Séries de potências

Antes da teoria geral, vejamos os exemplos mais importantes de séries de potências.

- A *série exponencial*:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

  Ela converge absoluta e uniformemente em todo compacto de $\mathbb{C}$, pois

$$\Big|\sum_n \frac{z^n}{n!}\Big| \leqslant \sum_n \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

  (exponencial real!). De acordo com o Rudin, "this is the most important function in mathematics".

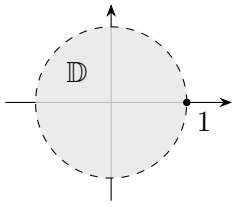
- A *série geométrica*:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

  Note que a função $1/(1-z)$ está definida em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, enquanto a série converge apenas em $\mathbb{D}$ (absoluta e uniformemente em todo compacto de $\mathbb{D}$). Para $|z| < 1$, a igualdade acima segue de

$$1+z+\cdots+z^N = \frac{(1+z+\cdots+z^N)(1-z)}{1-z} = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{1-z}$$

Observação 2.3. Diremos que $1/(1-z)$ é uma *continuação analítica* de $\sum_n z^n$ para $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.



[2] Por exemplo, como $u = (f + \overline{f})/2$, temos $2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial f}{\partial z}$, pois as equações de Cauchy–Riemann equivalem a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

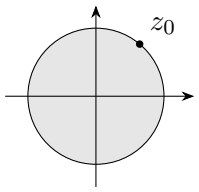
Definição 2.4. Uma *série de potências* é uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, com $a_n \in \mathbb{C}$.

Para $z_0 \in \mathbb{C}$, podemos analisar:

- a *convergência* da série em z_0, isto é, a existência do limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n$;
- a *convergência absoluta* da série em z_0, isto é, a existência do limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_n||z_0|^n$.

A convergência absoluta implica a convergência.

Observação 2.5 (importante). Pelo teste da comparação, a convergência absoluta em z_0 implica a convergência absoluta em todo z tal que $|z| \leqslant |z_0|$.



Isto implica que existe um "maior disco" $D_R(0)$ de convergência absoluta:

$$R = \sup\Big\{ r \in [0,\infty) : \sum_n |a_n| r^n < \infty \Big\}.$$

Definição 2.6. $R \in [0,\infty]$ é o *raio de convergência* da série de potências $\sum_n a_n z^n$, e $D_R(0)$ o seu *disco de convergência*.

Exemplo 2.7.

- $\sum_n z^n/n!$ tem $R = \infty$;
- $\sum_n z^n$ tem $R = 1$;
- $\sum_n n!\, z^n$ tem $R = 0$ (só converge em $z_0 = 0$).

Teorema 2.8 (Fórmula de Hadamard)**.** *Dada uma série de potências $\sum_n a_n z^n$, o seu raio de convergência R satisfaz*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Heuristicamente: no bordo do disco de convergência, devemos ter $(|a_n|R^n)^{1/n} \approx 1$.

Demonstração. Seja $L = \limsup_n |a_n|^{1/n}$. Basta provar que:

(i) se $|z| < 1/L$, então $\sum_n a_n z^n$ converge absolutamente;

(ii) se $|z| > 1/L$, então $\sum_n a_n z^n$ diverge.

Se $|z| < 1/L$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $(L+\varepsilon)|z| = r < 1$. Mas $|a_n|^{1/n} \leqslant L + \varepsilon$ para $n \gg 0$, logo

$$|a_n||z|^n \leqslant ((L+\varepsilon)|z|)^n = r^n, \qquad n \gg 0,$$

donde

$$\sum_n |a_n||z|^n \leqslant \sum_n r^n < \infty$$

(a menos de um número finito de termos). Isto mostra (i).

Se $|z| > 1/L$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $(L-\varepsilon)|z| = r > 1$, e $(a_{n_j})_j$ uma subsequência tal que $|a_{n_j}|^{1/n_j} \geqslant L - \varepsilon$. Logo,

$$|a_{n_j}||z|^{n_j} \geqslant ((L-\varepsilon)|z|)^{n_j} = r^{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty.$$

Portanto o termo geral da série não tende a zero e a série diverge. □

O item (ii) da demonstração acima mostra também que, se $\sum_n a_n z^n$ converge em um disco $D_r(0)$, então ela converge *absolutamente* neste disco (isto é, $r \leqslant R$). Em particular, o raio de convergência também admite a definição alternativa

$$R = \sup\Big\{ r \in [0,\infty) : \sum_n a_n z^n \text{ converge em } D_r(0) \Big\}.$$

Observação 2.9. A série pode convergir ou divergir nos pontos de $\partial D_R(0)$. Em geral, esse é um problema difícil. Veja o Exercício 19 do Capítulo 1 do Stein–Shakarchi, que trata das séries

$$\sum_n n z^n, \qquad \sum_n \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_n \frac{z^n}{n^2}.$$

Note que, se $g(z) = \sum_n a_n z^n$ converge em $D_r(0)$, então

$$f(z) = g(z - z_0) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$$

converge em $D_r(z_0)$. Esta é uma *série de potências centrada em* z_0.

Definição 2.10. Uma função $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é dita *analítica* em $z_0 \in \Omega$ se existe uma série de potências $\sum_n a_n (z - z_0)^n$ com raio de convergência $R > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \Omega \cap D_R(z_0).$$

Se f é analítica em todo ponto de Ω, dizemos que f é *analítica em* Ω.

Aula 3

3) Séries de potências (cont.)

Teorema 3.1. *Toda série de potências $f(z) = \sum_n a_n z^n$ define uma função holomorfa no seu disco de convergência $D_R(0)$ $(R > 0)$. Sua derivada é*

$$f'(z) = \sum_n n a_n z^{n-1},$$

que tem o mesmo raio de convergência R.

Corolário 3.2. *Toda função analítica em Ω é holomorfa em Ω (e infinitamente diferenciável).* □

Exemplo 3.3. As funções

$$e^z, \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

são inteiras.

Exercício 3.4. Leia o prólogo ("The exponential function") de W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3ª ed., McGraw-Hill, Nova York, 1987.

Demonstração do Teorema 3.1. Como $\lim_n n^{1/n} = 1$ (pois $\log n = o(n)$), temos

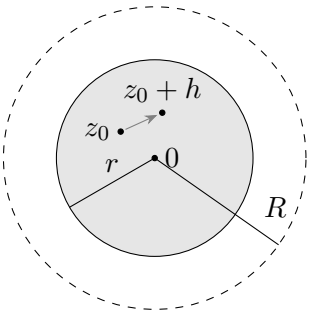
$$\limsup_n |n a_n|^{1/n} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Logo, pela fórmula de Hadamard, $f(z)$ e $g(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$ têm o mesmo raio de convergência R. Queremos mostrar que $f' = g$ em $D_R(0)$.

Tome $|z_0| < r < R$ e escreva

$$f(z) = S_N(z) + E_N(z), \qquad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n, \quad E_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n.$$

Note que S_N é um polinômio.



Se $|z_0 + h| < r$, então

$$\begin{aligned} f(z_0+h) - f(z_0) - g(z_0)h = &\underbrace{S_N(z_0+h) - S_N(z_0) - S_N'(z_0)h}_{o(h)} \\ &+ \underbrace{(S_N'(z_0) - g(z_0))h}_{o(h) \text{ se } N\to\infty!} \\ &+ \underbrace{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}_{?}. \end{aligned}$$

O coeficiente $S_N'(z_0) - g(z_0)$ não depende de h e tende a 0 quando $N \to \infty$; o problema é o último termo: é preciso controlar h e N simultaneamente. Usando $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, temos

$$\begin{aligned} |E_N(z_0+h) - E_N(z_0)| &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||(z_0+h)^n - z_0^n| \\ &\leqslant \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, |(z_0+h)^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1}| \Big) |h| \\ &\leqslant \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \, n \, r^{n-1} \Big) |h|, \end{aligned}$$

e a última soma não depende de h (e tende a 0 quando $N \to \infty$, pois é a cauda de uma série convergente, já que $r < R$).

Dado $\varepsilon > 0$, tome $N \gg 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$|S_N'(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon, \qquad \left| \frac{E_N(z_0+h) - E_N(z_0)}{h} \right| < \varepsilon$$

(para todo $h \neq 0$ com $|z_0 + h| < r$) e

$$|h| < \delta \implies \left| \frac{S_N(z_0+h) - S_N(z_0)}{h} - S_N'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Então, para $0 < |h| < \delta$ (com δ pequeno o suficiente para que $|z_0 + h| < r$),

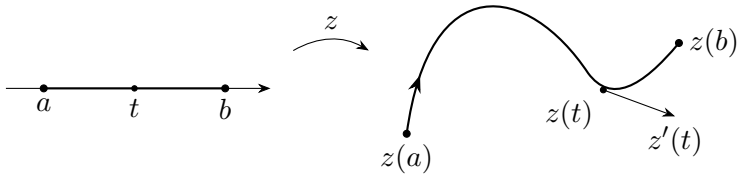
$$\left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \right| < 3\varepsilon. \qquad \square$$

4) Caminhos e curvas

Definição 3.5. Um *caminho* (ou "curva parametrizada") é uma função

$$z \colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto z(t).$$

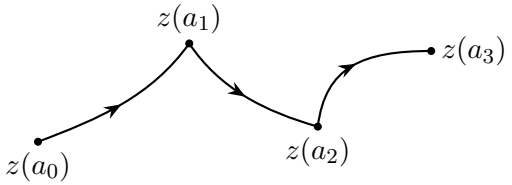
- O caminho $z(t)$ é *suave* se é de classe C^1 e $z'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ (derivadas laterais em a e b). O vetor $z'(t)$ é a "velocidade" do caminho.



- O caminho $z(t)$ é *suave por partes* se é contínuo e existem

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

tais que $z(t)$ é suave em $[a_k, a_{k+1}]$ para todo $k = 0, \ldots, n-1$.



Dois caminhos $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\tilde{z}\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ são *equivalentes* (por reparametrização) se existe um difeomorfismo C^1 $t\colon [c, d] \to [a, b]$, com $t'(s) > 0$ para todo s, tal que

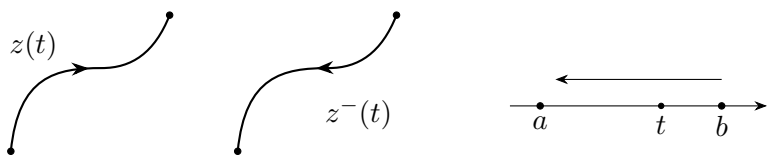
$$\tilde{z}(s) = z(t(s)).$$

Observação 3.6. A condição $t'(s) > 0$ significa que z e $\tilde{z}$ têm a "mesma orientação".

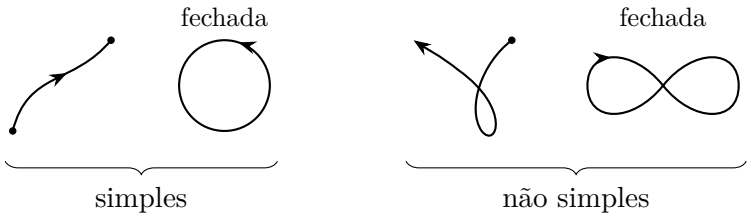
Definição 3.7. Uma *curva* (resp. *curva suave*) é uma classe de equivalência de caminhos suaves por partes (resp. suaves). Assim, uma curva é dada por um subconjunto $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ (a imagem de $z(t)$) junto com uma orientação.

Denotamos por γ^- a curva com a *orientação oposta*: se γ é parametrizada por $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, então γ^- é parametrizada por

$$z^-\colon [a, b] \to \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto z(b + a - t).$$



Uma curva é *fechada* se $z(a) = z(b)$ (para qualquer parametrização). Uma curva é *simples* se $z(t) \neq z(s)$ para todos $t \neq s$ em $[a, b]$, exceto possivelmente $z(a) = z(b)$.

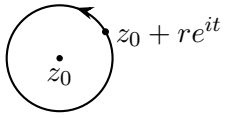


Exemplo 3.8. O círculo de centro z_0 e raio r,

$$\partial D_r(z_0) = C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

com a *orientação positiva* (anti-horária), é parametrizado por

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$



5) Integração em caminhos

Definição 3.9. Dada uma curva suave $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ parametrizada por $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ e uma função contínua $f\colon \gamma \to \mathbb{C}$, a *integral de f em γ* é

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt.$$

Observação 3.10. A expressão $\omega = f(z)\, dz = f(z)(dx + i\, dy)$ é uma "1-forma diferencial complexa", e

$$f(z(t))\, z'(t)\, dt = z^*(\omega)$$

é o seu pullback pela parametrização z.

Observação 3.11 (Independência da parametrização). Se $\tilde{z}\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ é equivalente a z via $t\colon [c, d] \to [a, b]$, então, pela mudança de variáveis $t = t(s)$ e pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt &= \int_c^d f(z(t(s)))\, z'(t(s))\, t'(s)\, ds \\ &= \int_c^d f(\tilde{z}(s))\, \tilde{z}'(s)\, ds.\end{aligned}$$

Logo a integral não depende da parametrização escolhida.

Se γ é suave por partes, com z suave em cada $[a_k, a_{k+1}]$ como acima, definimos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

O *comprimento* de γ é

$$|\gamma| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |z'(t)|\,dt,$$

onde $|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ se $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Observação 3.12. O comprimento também não depende da parametrização.

Proposição 3.13. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $f, g \in C^0(\gamma)$. Então:*

(i) $\displaystyle\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz;$

(ii) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma^-} f(z)\,dz;$

(iii) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant |\gamma| \cdot \sup_{z\in\gamma} |f(z)|.$

Demonstração. (iii) Para γ suave (o caso suave por partes é análogo, somando sobre os pedaços),

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt \leqslant \sup_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \int_a^b |z'(t)|\,dt. \qquad \square\end{aligned}$$

Aula 4

5) Integração em caminhos (cont.)

Definição 4.1. Uma *primitiva* de uma função contínua $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ em Ω.

Observação 4.2 (Formas diferenciais). Se $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é de classe C^1, então

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z}\, dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z}, \qquad \text{onde } dz = dx + i\, dy, \quad d\bar{z} = dx - i\, dy.$$

Se $\omega = f\, dz + g\, d\bar{z}$ é uma 1-forma de classe C^1, então

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}.$$

Uma primitiva de ω é uma função (0-forma) F tal que $dF = \omega$. Se $\omega = f(z)\, dz$ (isto é, $g = 0$), então $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$, ou seja, F é holomorfa!

Teorema 4.3. *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tem primitiva F em Ω e $\gamma \subseteq \Omega$ é uma curva com ponto inicial w_1 e ponto final w_2, então*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(w_2) - F(w_1).$$

Demonstração. Suponha, para simplificar, que γ é suave, parametrizada por $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt = \int_a^b F'(z(t))\, z'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (F \circ z)'(t)\, dt = F(z(b)) - F(z(a)),\end{aligned}$$

pelo teorema fundamental do cálculo. (No caso suave por partes, basta somar sobre os pedaços.) □

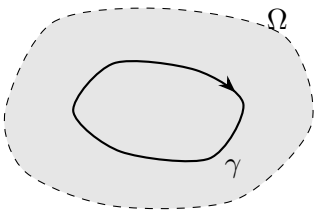
Observação 4.4. Em linguagem de formas diferenciais, pelo teorema de Stokes,

$$\int_\gamma f\, dz = \int_\gamma dF = \int_{\partial\gamma} F = F(w_2) - F(w_1),$$

onde $\partial\gamma$ é o "bordo" de γ: o ponto final w_2 com sinal + e o ponto inicial w_1 com sinal −.

Corolário 4.5. *Se $\gamma \subseteq \Omega$ é uma curva fechada e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tem primitiva, então*

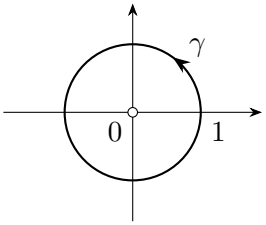
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$



Exemplo 4.6. Seja $f(z) = 1/z$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e seja $\gamma = C_1(0)$, parametrizada por $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Então

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i \neq 0.$$

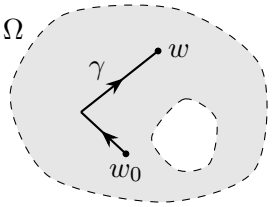
Logo $1/z$ *não* tem primitiva em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$! ("Não existe um logaritmo holomorfo em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$".)



Observação 4.7. A forma $\dfrac{dz}{z}$ é fechada, mas não é exata!

Corolário 4.8. *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa, Ω é conexo e $f' \equiv 0$, então f é constante.*

Demonstração. Fixe $w_0 \in \Omega$. Para todo $w \in \Omega$ existe uma curva $\gamma \subseteq \Omega$ que liga w_0 a w (por exemplo, poligonal).



Logo,

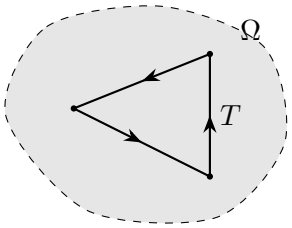
$$f(w) - f(w_0) = \int_\gamma f'(z)\, dz = 0. \qquad \square$$

6) Teorema de Goursat

Teorema 4.9 (Goursat)**.** *Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é aberto e $T \subseteq \Omega$ é um triângulo cujo interior também está contido em Ω, então*

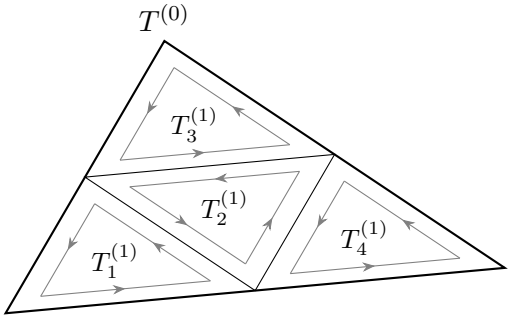
$$\int_T f(z)\,dz = 0$$

para toda $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa.



Demonstração. Seja $T^{(0)} = T$ (com orientação positiva). Sejam $d^{(0)} = \operatorname{diam}(T^{(0)})$ e $p^{(0)} = |T^{(0)}|$ o seu perímetro.

Conectando os pontos médios dos lados de $T^{(0)}$, obtemos quatro novos triângulos semelhantes $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_3^{(1)}$, $T_4^{(1)}$ (com orientação positiva):



As integrais sobre os lados internos se cancelam (cada um é percorrido duas vezes, em sentidos opostos), de forma que

$$\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{T_j^{(1)}} f(z)\,dz.$$

Para algum j, temos então

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leqslant 4 \left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)\,dz\right|.$$

Denote este $T_j^{(1)}$ por $T^{(1)}$ e defina $d^{(1)} = \operatorname{diam}(T^{(1)})$, $p^{(1)} = |T^{(1)}|$. Note que

$$d^{(1)} = \frac{d^{(0)}}{2} \qquad \text{e} \qquad p^{(1)} = \frac{p^{(0)}}{2}.$$

Obtemos indutivamente triângulos $T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ com

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leqslant 4^n \left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| \qquad \text{e} \qquad d^{(n)} = \frac{d^{(0)}}{2^n}, \quad p^{(n)} = \frac{p^{(0)}}{2^n}.$$

Objetivo: mostrar que $\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz \to 0$, quando $n \to \infty$, mais rápido que 4^{-n}.

Seja $K^{(n)}$ o "triângulo sólido" com $\partial K^{(n)} = T^{(n)}$. Como $K^{(0)} \supseteq K^{(1)} \supseteq K^{(2)} \supseteq \cdots$ são compactos não vazios e $\operatorname{diam}(K^{(n)}) \to 0$, existe um único $z_0 \in \bigcap_{n\geqslant 0} K^{(n)}$. Como f é holomorfa em z_0,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{o(z - z_0)}_{r(z)}, \qquad z \to z_0.$$

Como polinômios têm primitivas, $\int_{T^{(n)}} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\,dz = 0$, e portanto

$$\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{T^{(n)}} r(z)\,dz.$$

Logo, como $|z - z_0| \leqslant d^{(n)}$ para $z \in T^{(n)}$ (pois $z, z_0 \in K^{(n)}$),

$$\left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{T^{(n)}} \frac{r(z)}{z - z_0}\,(z - z_0)\,dz\right| \leqslant d^{(n)} p^{(n)} \varepsilon_n,$$

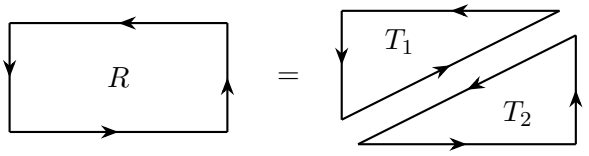
onde $\varepsilon_n = \sup_{z\in T^{(n)}} \left|\frac{r(z)}{z-z_0}\right|$. Note que $\varepsilon_n \to 0$, pois $r(z)/(z - z_0) \to 0$ quando $z \to z_0$ e $T^{(n)} \subseteq K^{(n)}$ encolhe para z_0. Concluímos que

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)\,dz\right| \leqslant 4^n d^{(n)} p^{(n)} \varepsilon_n = d^{(0)} p^{(0)} \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Logo $\int_T f(z)\,dz = 0$. □

Corolário 4.10. *O mesmo enunciado vale com retângulos no lugar de triângulos (ou, mais geralmente, qualquer polígono).*

Demonstração. Divida o retângulo R em dois triângulos T_1 e T_2 por uma diagonal, ambos com orientação positiva:



A diagonal é percorrida uma vez em cada sentido, logo

$$\int_R f(z)\,dz = \int_{T_1} f(z)\,dz + \int_{T_2} f(z)\,dz = 0. \qquad \square$$

Aula 5

7) Primitivas locais

Teorema 5.1. *Se f é holomorfa em um disco aberto D, então f tem primitiva em D.*

Demonstração. Podemos supor D centrado em 0. Dado $z \in D$, seja $\gamma_z = [0, z]$ o segmento de 0 a z (contido em D, pois D é convexo), e defina

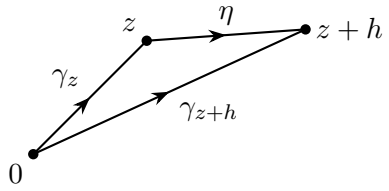
$$F(z) = \int_{[0,z]} f(w)\, dw.$$

Devemos mostrar que F é holomorfa em D e $F' = f$. Fixe $z \in D$ e $h \in \mathbb{C}$ tal que $z + h \in D$, e seja $\eta = [z, z + h]$. Como D é convexo, o triângulo de vértices 0, z e $z + h$ está contido em D, e o teorema de Goursat dá

$$\int_{[0,z]} f(w)\, dw + \int_{\eta} f(w)\, dw + \int_{[z+h,0]} f(w)\, dw = 0,$$

isto é,

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\eta} f(w)\, dw.$$



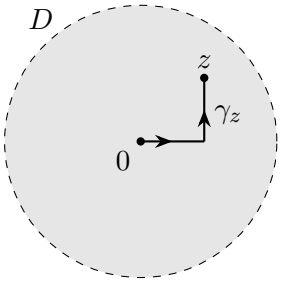
Logo,

$$\begin{aligned} F(z + h) - F(z) &= \int_{\eta} \big(f(z) + f(w) - f(z)\big)\, dw \\ &= f(z) \cdot h + \underbrace{\int_{\eta} \big(f(w) - f(z)\big)\, dw}_{o(h)}, \end{aligned}$$

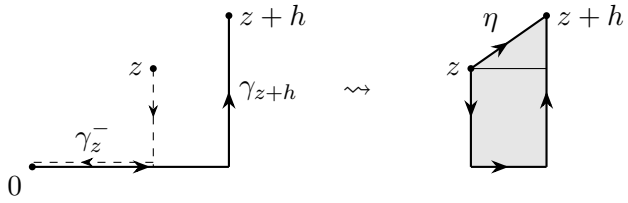
onde a última integral é $o(h)$ pois, por continuidade de f, ela é limitada por $|h| \cdot \sup_{w \in \eta} |f(w) - f(z)|$. Logo $F'(z) = f(z)$. □

Observação. O mesmo argumento mostra que toda função holomorfa num aberto convexo (ou, mais geralmente, estrelado com respeito a um ponto) tem primitiva.

Observação (A demonstração do livro de Stein e Shakarchi). Em Stein–Shakarchi, usa-se, no lugar do segmento $[0, z]$, a curva poligonal γ_z que vai de 0 a $\operatorname{Re} z$ na horizontal e depois de $\operatorname{Re} z$ a z na vertical:



Nesse caso, ao calcular $F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f - \int_{\gamma_z} f$, os trechos horizontais comuns se cancelam, e o que sobra é o bordo de um retângulo mais um triângulo, a menos do segmento η de z a $z+h$:



Pelo teorema de Goursat (para o triângulo e para o retângulo), obtemos novamente $F(z+h) - F(z) = \int_\eta f(w)\,dw$, e o resto da demonstração é igual. A versão com o segmento $[0, z]$ é mais simples, pois usa o teorema de Goursat apenas para um triângulo.

Observação 5.2. Localmente, toda função holomorfa tem primitiva (cf. lema de Poincaré!). Note, porém, que para aplicar o lema de Poincaré precisaríamos saber que funções holomorfas são de classe C^1 (o que segue deste teorema).

Corolário 5.3 (Teorema de Cauchy num disco)**.** *Se f é holomorfa em um disco D, então*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

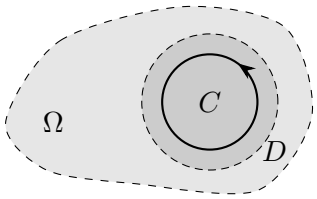
para toda curva fechada $\gamma \subseteq D$.

Demonstração. Segue do teorema anterior e do fato de que a integral de uma função com primitiva sobre uma curva fechada é nula. □

Corolário 5.4. *Se f é holomorfa em um aberto Ω contendo um círculo C e o seu interior, então*

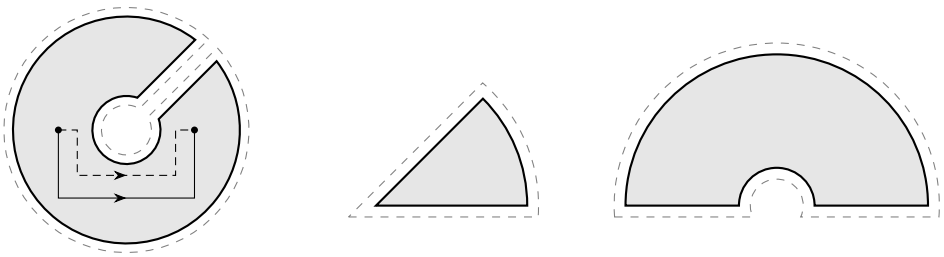
$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Demonstração. Aplique o teorema de Cauchy para um disco aberto D tal que $C \subseteq D \subseteq \Omega$ (que existe por compacidade de C e do seu interior).



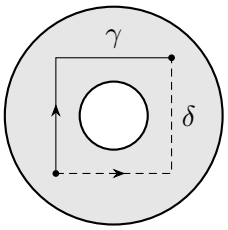
□

Os resultados acima valem analogamente para "contornos mais gerais", como os bordos das regiões abaixo (contidas, junto com uma vizinhança, no domínio de f). A ideia é que, nessas regiões, a integral ao longo de caminhos poligonais com lados horizontais e verticais não depende do caminho poligonal escolhido, pelo teorema de Goursat para retângulos; com isso, constrói-se uma primitiva numa vizinhança da região como na demonstração acima.



fechadura | setor | semicírculo indentado

Observação 5.5. Num anel, não é possível aplicar o teorema de Goursat para provar que $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$, onde γ e δ são caminhos com as mesmas extremidades que contornam o buraco por lados diferentes (e, em geral, essas integrais são de fato diferentes!).

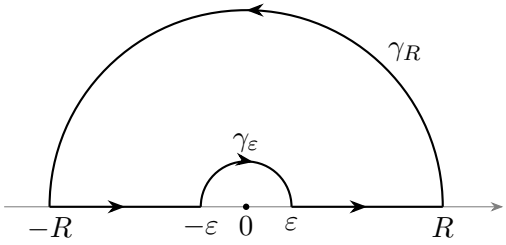


Aplicação.

Exemplo 5.6. Vamos calcular

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Seja $f(z) = \dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e sejam γ_ε e γ_R os semicírculos de raios ε e R no semiplano superior, orientados como na figura (γ_ε de $-\varepsilon$ a ε e γ_R de R a $-R$).



Pelo teorema de Cauchy (para o semicírculo indentado),

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Como

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz\right| \leqslant \sup_{z\in\gamma_R} \frac{|1-e^{iz}|}{|z|^2} \cdot \pi R \leqslant \frac{2}{R^2} \cdot \pi R = \frac{2\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

(pois $|e^{iz}| = e^{\frac{iz-i\bar{z}}{2}} = e^{-y} \leqslant 1$ se $y \geqslant 0$), obtemos, fazendo $R \to \infty$,

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx = -\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz. \qquad (*)$$

Agora note que, como $e^{iz} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(iz)^n}{n!} = 1 + iz - \frac{z^2}{2} - \frac{iz^3}{6} + \cdots$,

$$\frac{1-e^{iz}}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\right) = -\frac{i}{z} + E(z), \quad E(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(iz)^{n-2}}{n!} \xrightarrow[z\to 0]{} \tfrac{1}{2}.$$

Logo, como E é limitada perto de 0 e $|\gamma_\varepsilon| = \pi\varepsilon$,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \left(-\frac{i}{z}\right) dz + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} E(z)\,dz}_{I(\varepsilon)} = i\int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{dz}{z} + I(\varepsilon)$$

$$= i\int_0^\pi \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}\,d\theta + I(\varepsilon) = -\pi + I(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\pi.$$

De $(*)$ concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2}\,dz = \pi.$$

Tomando a parte real:

$$2\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \pi,$$

ou seja, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

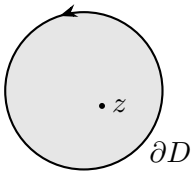
Aula 6

8) Fórmula integral de Cauchy

Teorema 6.1 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Seja f holomorfa em um aberto contendo um disco fechado $\overline{D}$. Então, para todo $z \in D$, vale*

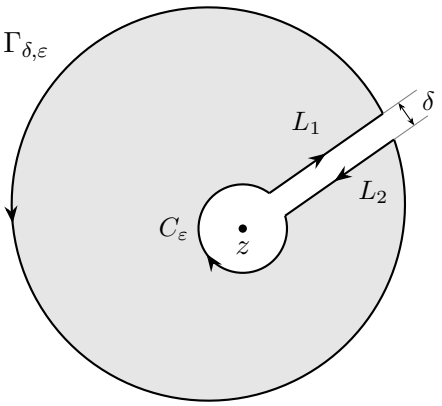
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

onde ∂D é orientado positivamente.



Em outras palavras, "f é determinada pelos seus valores em ∂D".

Demonstração. Fixe $z \in D$ e seja $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ a "fechadura" da figura, onde ε é o raio do círculo menor C_ε (centrado em z) e δ é a largura do corredor, cujos lados são L_1 e L_2.



A função

$$F(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(w)}{w - z}$$

é holomorfa em uma vizinhança de $\overline{D} \setminus \{z\}$ (mais precisamente, num aberto contendo a fechadura e o seu interior); logo $\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} F(w)\, dw = 0$ pelo teorema de Cauchy.

Por continuidade uniforme,

$$\int_{L_1} F(w)\,dw + \int_{L_2} F(w)\,dw \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0,$$

pois L_1 e L_2 são percorridos em sentidos opostos e se aproximam de um mesmo segmento. Logo, fazendo $\delta \to 0$, obtemos, para todo $\varepsilon > 0$ (pequeno),

$$\int_{\partial D} F(w)\,dw + \int_{C_\varepsilon} F(w)\,dw = 0,$$

onde C_ε está orientado negativamente. Parametrizando C_ε^- (orientado positivamente) por $w = z + \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, temos $dw = i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta$ e

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} F(w)\,dw = \int_{C_\varepsilon^-} F(w)\,dw &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\, i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta.\end{aligned}$$

Como o lado esquerdo não depende de ε e $f(z+\varepsilon e^{i\theta}) \to f(z)$ uniformemente em θ quando $\varepsilon \to 0$ (pela continuidade de f em z), concluímos que

$$\int_{\partial D} F(w)\,dw = i\int_0^{2\pi} f(z)\,d\theta = 2\pi i\, f(z). \qquad \square$$

Observação (A demonstração do livro de Stein e Shakarchi). Em Stein–Shakarchi, a integral sobre C_ε^- é tratada decompondo

$$F(w) = \frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(z)}{w-z} + \frac{f(w)-f(z)}{w-z},$$

de modo que

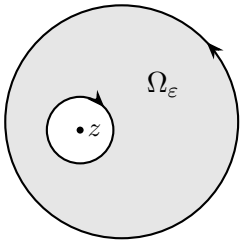
$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon^-} F(w)\,dw &= \int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(z)}{w-z}\,dw + \int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw \\ &= 2\pi i\, f(z) + \int_{C_\varepsilon^-} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw.\end{aligned}$$

Como f é holomorfa em z, o quociente $(f(w)-f(z))/(w-z)$ é limitado perto de z, e a última integral é limitada por uma constante vezes o comprimento $2\pi\varepsilon$ de C_ε, logo tende a 0 quando $\varepsilon \to 0$. A versão acima, que calcula diretamente a integral sobre C_ε^-, usa apenas a continuidade de f em z.

Observação 6.2. A fórmula também vale para retângulos no lugar de círculos.

Observação 6.3. A 1-forma $F(w)\,dw$ é fechada em $\Omega_\varepsilon = \overline{D} \setminus D_\varepsilon(z)$. Pelo teorema de Stokes,

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} d\big(F(w)\,dw\big) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} F(w)\,dw = \int_{\partial D} F(w)\,dw - \int_{\partial D_\varepsilon(z)} F(w)\,dw.$$

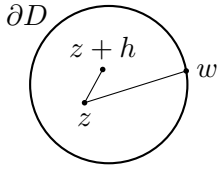


Corolário 6.4. *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa, então a n-ésima derivada (complexa) $f^{(n)}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ existe e é holomorfa para todo $n \geqslant 0$. Dado um disco $\overline{D} \subseteq \Omega$, para todo $z \in D$ vale*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw. \tag{I_n}$$

Demonstração. Indução em n.

- $n = 0$: é a fórmula integral de Cauchy.
- Suponha que f tem $n-1$ derivadas e que vale (I_{n-1}). Para $h \in \mathbb{C}$ pequeno,



$$\begin{aligned}
&\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} \\
&\quad = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{h} \left(\frac{1}{(w-z-h)^n} - \frac{1}{(w-z)^n} \right) dw \\
&\quad = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{h} (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + B^{n-1})\, dw,
\end{aligned}$$

onde $A = \frac{1}{w-z-h}$, $B = \frac{1}{w-z}$, e usamos $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + \cdots + B^{n-1})$. Note que

$$A - B = \frac{1}{w-z-h} - \frac{1}{w-z} = \frac{h}{(w-z-h)(w-z)},$$

de modo que o fator h se cancela. O integrando converge uniformemente em $w \in \partial D$, quando $h \to 0$, para $f(w) \cdot \frac{1}{(w-z)^2} \cdot \frac{n}{(w-z)^{n-1}}$. Tomando $h \to 0$, obtemos (I_n). □

Corolário 6.5 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $\overline{D}_R(z_0) \subseteq \Omega$, então*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!\,\|f\|_{C_R(z_0)}}{R^n}, \qquad \textit{onde } \|f\|_{C_R(z_0)} = \sup_{z \in C_R(z_0)} |f(z)|.$$

Demonstração. Segue da fórmula integral:

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}}\, Rie^{it}\, dt \right| \\ &\leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{\|f\|_{C_R(z_0)}}{R^n} \cdot 2\pi = \frac{n!\,\|f\|_{C_R(z_0)}}{R^n}. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.6 (Representação por séries de potências)**.** *Seja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e D um disco centrado em z_0 tal que $\overline{D} \subseteq \Omega$. Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in D$, onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n \geqslant 0)$$

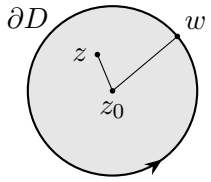
são os "coeficientes de Taylor" de f em z_0.

Demonstração. Seja $z \in D$. Pela fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Ideia: expandir o integrando em série geométrica. Temos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$



Como $w \in \partial D$ e $z \in D$, existe $r = r(z) \in (0,1)$ tal que

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < r \qquad \text{para todo } w \in \partial D$$

(por exemplo, qualquer r com $|z-z_0|/R < r < 1$, onde R é o raio de D). Logo,

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

com convergência *uniforme* em $w \in \partial D$, e portanto podemos intercambiar $\sum$ e $\int$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a fórmula integral para as derivadas. □

Observação 6.7. Se f é inteira, a sua série de Taylor (em qualquer ponto) converge em todo $\mathbb{C}$! ($R = \infty$.)

Corolário 6.8 (Teorema de Liouville)**.** *Toda função inteira e limitada é constante.*

Demonstração. Basta mostrar que $f' \equiv 0$. Pela desigualdade de Cauchy, para todo z_0 e todo $R > 0$ vale

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{\|f\|_{\partial D_R(z_0)}}{R} \leqslant \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

(Assim, qualquer função inteira não constante é *ilimitada*: $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, e^z, ...)

Corolário 6.9 (Teorema fundamental da álgebra)**.** *Todo polinômio não constante $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $a_j \in \mathbb{C}$, tem pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$.*

(Equivalentemente, por indução no grau, p se fatora completamente: $p(z) = a_n(z-w_1)\cdots(z-w_n)$.)

Demonstração. Por absurdo, se p não tem raízes, então $1/p$ é inteira e limitada. De fato, $1/p$ é contínua e

$$\frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{1}{\left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

(pois $a_n \neq 0$). Pelo teorema de Liouville, $1/p$ é constante. Absurdo! □

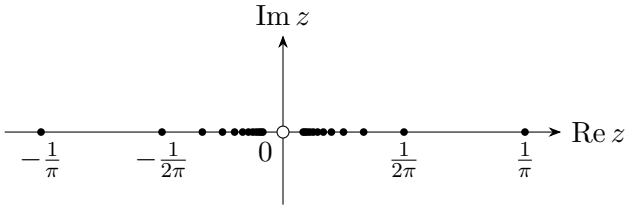
Observação. No Anexo, incluímos outras notas minhas com outra maneira, "mais geométrica", de desenvolver esta teoria: supondo de início que f seja de classe C^1, a holomorfia equivale a dizer que a 1-forma $f\,dz$ é fechada, e a fórmula integral de Cauchy sai diretamente do teorema de Stokes aplicado ao anel $\overline{D} \setminus D_\varepsilon(a)$, sem passar pelo teorema de Goursat nem pelas primitivas locais. O mesmo argumento leva rapidamente aos teoremas de Liouville e fundamental da álgebra.

Aula 7

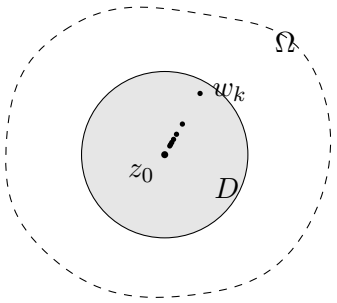
9) Princípio da continuação analítica

Teorema 7.1. *Seja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, com Ω conexo. Se f se anula em um subconjunto com um ponto de acumulação em Ω, então $f \equiv 0$.*

Observação 7.2. É importante que o ponto de acumulação pertença a Ω. Por exemplo, $\operatorname{sen}(1/z) \not\equiv 0$ se anula em $\{1/n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, mas não é holomorfa em 0.



Demonstração. Seja $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ uma sequência com ponto de acumulação $z_0 \in \Omega$ tal que $f(w_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja D um disco centrado em z_0 com $\overline{D} \subseteq \Omega$.



Então, para todo $z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (a_n = f^{(n)}(z_0)/n!).$$

Se $f \not\equiv 0$ em D, existe um menor m tal que $a_m \neq 0$, de forma que

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m \big(1 + g(z)\big),$$

com $g(z) \to 0$ quando $z \to z_0$. Logo, para $k \gg 0$ e $w_k \neq z_0$ (passando a uma subsequência, podemos supor $w_k \to z_0$), temos

$$0 = a_m (w_k - z_0)^m (1 + \underbrace{g(w_k)}_{\text{perto de } 0}) \neq 0.$$

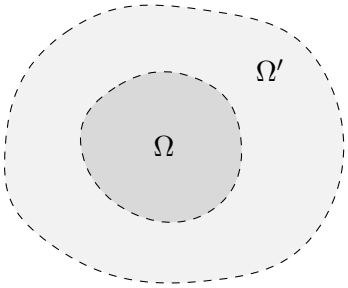
Absurdo! Isto mostra que $f \equiv 0$ em D.

Seja $U = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}^\circ$ (o interior). Temos $U \neq \emptyset$, pois $D \subseteq U$. O conjunto U é aberto (por definição) e fechado em Ω: se $(z_n) \subseteq U$ e $z_n \to z \in \Omega$, então $f(z) = 0$ por continuidade, e o mesmo argumento anterior (com z no lugar de z_0) mostra que f se anula em uma vizinhança de z, isto é, $z \in U$. Logo $U = \Omega$, por conexidade. □

Corolário 7.3. *Se Ω é conexo e $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ são funções holomorfas tais que $f = g$ em um subconjunto com um ponto de acumulação em Ω, então $f = g$ em Ω.* □

Corolário 7.4. *Se Ω é conexo, o anel $\mathcal{O}(\Omega)$ das funções holomorfas em Ω é um domínio ($f \cdot g = 0 \Rightarrow f = 0$ ou $g = 0$).* □

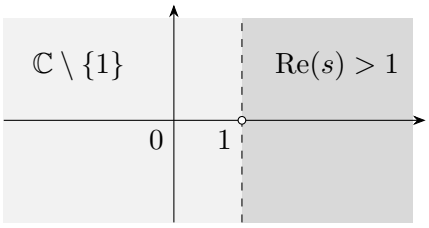
Sejam $\Omega \subseteq \Omega'$ abertos conexos e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se $F\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa tal que $F|_\Omega = f$, dizemos que F é a *continuação analítica* de f a Ω' (única, se existir!).



Exemplo 7.5. Veremos que

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

define uma função holomorfa em $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ e admite uma continuação analítica em $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.



10) Limites de funções holomorfas

Teorema 7.6 (Morera)**.** *Se $D \subseteq \mathbb{C}$ é um disco e $f\colon D \to \mathbb{C}$ é contínua tal que*

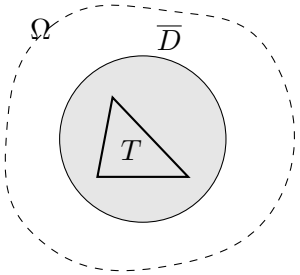
$$\int_T f(z)\,dz = 0 \qquad (*)$$

para todo triângulo $T \subseteq D$, então f é holomorfa.

Demonstração. Na demonstração da existência de primitivas para funções holomorfas (no disco), só usamos $(*)$ (Goursat) e a continuidade de f. Logo, f admite uma primitiva F (holomorfa). Mas a derivada de uma função holomorfa é holomorfa (pela fórmula integral de Cauchy). Logo $f = F'$ é holomorfa. □

Teorema 7.7 ("Limite uniforme em compactos de funções holomorfas é holomorfa")**.** *Se $(f_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequência de funções holomorfas em Ω tal que $f_n \to f$ uniformemente em todo compacto $K \subseteq \Omega$, então $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa.*

Demonstração. Seja $\overline{D} \subseteq \Omega$ um disco e $T \subseteq D$ um triângulo.



Pelo teorema de Goursat, $\int_T f_n(z)\,dz = 0$ para todo $n \geqslant 1$ (pois f_n é holomorfa em D). Como $\overline{D}$ é compacto, $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{D}$ (em particular, f é contínua em D), donde

$$0 = \int_T f_n(z)\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_T f(z)\,dz,$$

ou seja, $\int_T f(z)\,dz = 0$. Segue do teorema de Morera que f é holomorfa em D. Como D é arbitrário, f é holomorfa em Ω. □

Na prática: podemos construir funções holomorfas via séries (ou produtos infinitos!) uniformemente convergentes em compactos:

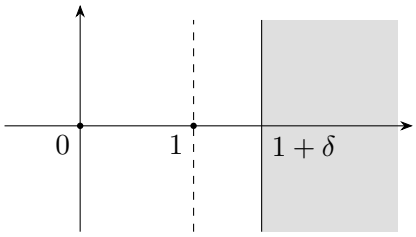
$$F(z) = \sum_n F_n(z).$$

Exemplo 7.8 (Função zeta de Riemann)**.** Se $s = \sigma + it$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$, então

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = |e^{-s\log n}| = e^{-\sigma \log n} = \frac{1}{n^\sigma}.$$

Logo, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ converge absoluta e uniformemente em todo semiplano fechado da forma

$$\{s \in \mathbb{C} : \underbrace{\mathrm{Re}(s)}_{\sigma} \geqslant 1+\delta\}, \qquad \delta > 0 \qquad \Big(\text{pois } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty\Big).$$

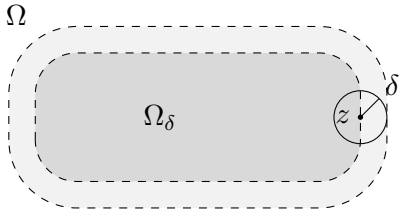


Logo, $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ define uma função holomorfa em $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Teorema 7.9 (Convergência das derivadas)**.** *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, $f_n' \to f'$ uniformemente em compactos.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $f_n \to f$ uniformemente em Ω (substituindo Ω por um aberto de fecho compacto contido em Ω). Dado $\delta > 0$, seja

$$\Omega_\delta = \{z \in \Omega : \overline{D}_\delta(z) \subseteq \Omega\}.$$



Basta provar que $f_n' \to f'$ uniformemente em Ω_δ para cada $\delta > 0$ (pois todo compacto $K \subseteq \Omega$ está contido em algum Ω_δ). Pela desigualdade de Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!\,\|f\|_{C_R(z_0)}}{R^n},$$

para $z \in \Omega_\delta$ temos

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leqslant \frac{\|f_n - f\|_{C_\delta(z)}}{\delta} \leqslant \frac{\|f_n - f\|_\Omega}{\delta}. \qquad \square$$

Exemplo 7.10. $\zeta'(s) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{-\log(n)}{n^s}$ em $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Aula 8

10) Limites de funções holomorfas (cont.)

Um pouco sobre produtos infinitos...

Definição 8.1. Se $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+a_n)$$

(quando o limite existe).

Proposição 8.2. *Se $\sum|a_n| < \infty$, então $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = P$ converge. Neste caso, $P = 0$ se, e somente se, existe n tal que $1 + a_n = 0$.*

Ideia:

$$\prod(1+a_n) = \exp\Big(\log\prod(1+a_n)\Big) = \exp\Big(\sum\log(1+a_n)\Big), \qquad \log(1+x) \sim x.$$

Corolário 8.3. *Se $(f_n)_{n\geqslant 1}$ é uma sequência de funções holomorfas em Ω tal que*

$$|f_n(z)| \leqslant c_n \quad \forall z \in \Omega \qquad e \qquad \sum_n c_n < \infty,$$

então

(i) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ converge uniformemente em Ω a uma função holomorfa $F(z)$;

(ii) se $1 + f_n(z) \neq 0$ para todo n, então

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}.$$

(O lado esquerdo é $(\log F(z))'$, a "derivada logarítmica".)

Demonstração. (i) Vamos aplicar o critério de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \geqslant 0$ tal que

$$\left|\prod_{n=1}^{N+p}(1+c_n) - \prod_{n=1}^{N}(1+c_n)\right| < \varepsilon$$

para todo $p \geqslant 0$ (pela proposição, o produto $\prod(1+c_n)$ converge). Então, para $z \in \Omega$ e $p \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{n=1}^{N+p}(1+f_n(z)) - \prod_{n=1}^{N}(1+f_n(z))\right| \\
&\quad= \left|\prod_{n=1}^{N}(1+f_n(z))\right|\left|\prod_{n=N+1}^{N+p}(1+f_n(z)) - 1\right| \\
&\quad\leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+|f_n(z)|)\left|\prod_{n=N+1}^{N+p}(1+|f_n(z)|) - 1\right| \\
&\quad\leqslant \prod_{n=1}^{N}(1+c_n)\left|\prod_{n=N+1}^{N+p}(1+c_n) - 1\right| \\
&\quad= \left|\prod_{n=1}^{N+p}(1+c_n) - \prod_{n=1}^{N}(1+c_n)\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Na primeira desigualdade: ao expandir o produto $\prod_{n=N+1}^{N+p}(1+f_n(z))$, o termo 1 cancela com o -1, e os termos restantes são produtos dos $f_n(z)$, sem sinais de menos; basta então usar a desigualdade triangular usual. Logo a convergência é uniforme em Ω, e o limite é holomorfo pelo teorema da aula passada sobre limites uniformes de funções holomorfas. □

Exemplo 8.4 (Produto de Euler)**.** Para $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}}, \qquad p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots$$

O produto converge a uma função holomorfa: escrevendo $s = \sigma + it$,

$$\begin{aligned}
\left|\overbrace{\frac{1}{1-p_n^{-s}} - 1}^{f_n(s)}\right| &= \left|\frac{1-(1-p_n^{-s})}{1-p_n^{-s}}\right| = \left|\frac{p_n^{-s}}{1-p_n^{-s}}\right| = \left|\frac{1}{p_n^{s}-1}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|p_n^s|-1} = \frac{1}{p_n^\sigma - 1} \leqslant \frac{1}{n^\sigma}
\end{aligned}$$

(convergência uniforme em semiplanos $\sigma \geqslant 1+\delta$).

Note que

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

(convergência absoluta). Segue do teorema fundamental da aritmética que

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-s}} = \sum_{n \in S_N} \frac{1}{n^s},$$

onde $S_N \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ é o subconjunto dos naturais cujos divisores primos são todos $\leqslant p_N$. Como $\{1, \ldots, N\} \subseteq S_N$, segue que

$$\left| \zeta(s) - \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - p_n^{-s}} \right| \leqslant \sum_{n>N} \frac{1}{n^\sigma} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Observação 8.5. Em particular, $\zeta(s) \neq 0$ se $\mathrm{Re}(s) > 1$ (pela proposição, pois nenhum fator do produto de Euler se anula).

Observação 8.6. Tome $s > 1$ real. Então, usando $-\log(1-x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$,

$$\begin{aligned}
\log \zeta(s) &= \sum_p \log\Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\Big) = \sum_p \Big(\underbrace{\frac{1}{p^s}}_{\text{termo dominante}} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^{3s}} + \cdots \Big) \\
&< \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \Big(\frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots \Big) = \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \frac{1/p^{2s}}{1 - 1/p^s} \\
&= \sum_p \frac{1}{p^s} + \underbrace{\sum_p \frac{1}{p^s(p^s-1)}}_{\leqslant \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)} = 1} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\log \zeta(s) \leqslant \sum_p \frac{1}{p^s} + 1.$$

Fazendo $s \to 1^+$, temos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \longrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Como a série harmônica diverge, segue que

$$\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{s\to 1^+} \sum_p \frac{1}{p^s} = \infty.$$

Como $1/p > 1/p^s$, concluímos que

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

("mais forte que a infinitude dos primos: eles são bem distribuídos entre os inteiros $\geqslant 1$").

Veremos que, estudando a função *complexa* $\zeta(s)$, podemos ser mais precisos sobre a distribuição assintótica dos primos.

Exercício 8.7. Calcule $\zeta'(s)/\zeta(s)$.

Exemplo 8.8 (Fórmula produto para $\operatorname{sen}(z)$)**.** Veremos (usando funções meromorfas) que

$$\operatorname{sen}(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\Big).$$

(Note que $\left|-\frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right| = \frac{|z|^2}{\pi^2}\,\frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$.) "Abrindo o produto":

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z) &= z\Big(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\Big)\cdots \\
&= z\Big(1 - \frac{1}{\pi^2}\Big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\Big)z^2 + \cdots\Big) \\
&= z - \frac{\zeta(2)}{\pi^2} z^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Mas a expansão de Taylor é

$$\operatorname{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Logo

$$\frac{\zeta(2)}{\pi^2} = \frac{1}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Mais geralmente:

Teorema 8.9 (Euler)**.** *Para todo $k \geqslant 2$ par,*

$$\zeta(k) = \frac{|B_k|\,(2\pi)^k}{2 \cdot k!} = -\frac{B_k\,(2\pi i)^k}{2 \cdot k!} = (\textit{número racional}) \times \pi^k,$$

onde $B_k \in \mathbb{Q}$ é o k-ésimo número de Bernoulli*, definido por*

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \cdots$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	$\cdots$

Aula 9

10) Limites de funções holomorfas (cont.)

Vamos demonstrar o teorema de Euler (Teorema 8.9) enunciado na aula passada: para $k \geqslant 2$ par, $\zeta(k) = -B_k(2\pi i)^k/(2 \cdot k!)$.

Demonstração do teorema de Euler. Tomamos a derivada logarítmica na fórmula produto para o seno (em $\mathbb{C} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$):

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}(z) = \frac{\operatorname{sen}'(z)}{\operatorname{sen}(z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z/\pi^2 n^2}{1 - z^2/\pi^2 n^2} \\ &= \frac{1}{z}\Big(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2/\pi^2 n^2}{1 - z^2/\pi^2 n^2}\Big) \\ &= \frac{1}{z}\Big(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{\pi^{2m} n^{2m}}\Big) \\ &= \frac{1}{z}\Big(1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} z^{2m}\Big).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} &= i\,\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i\Big(1 + \frac{2}{e^{2iz} - 1}\Big) \\ &= \frac{1}{z}\Big(iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}\Big) = \frac{1}{z}\Big(iz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2iz)^n\Big).\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes (por que podemos fazer isso?):

$$-2\,\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} = \frac{B_{2m}}{(2m)!}(2i)^{2m}. \qquad \square$$

11) Funções holomorfas definidas por integrais

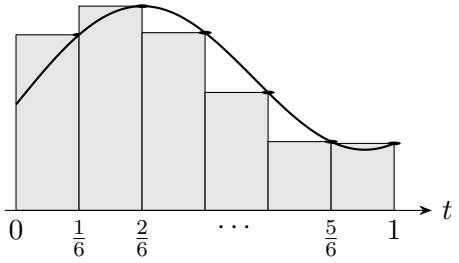
Teorema 9.1. *Seja $F\colon \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua tal que $F(\cdot, t)$ é holomorfa em Ω para todo $t \in [a,b]$. Então*

$$f(z) = \int_a^b F(z,t)\,dt$$

é holomorfa em Ω.

Demonstração. Podemos supor $a = 0$, $b = 1$. Para $n \geqslant 1$, considere a "soma de Riemann"

$$f_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(z, k/n).$$

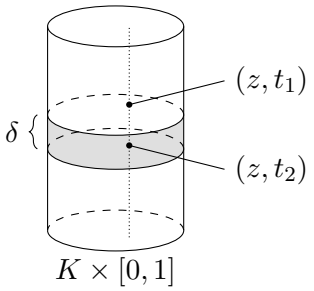


Note que f_n é holomorfa. Basta mostrar que $f_n \to f$ uniformemente em todo compacto $K \subseteq \Omega$.

Como $K \times [0,1]$ é compacto (o que implica a continuidade uniforme de F em $K \times [0,1]$), para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies \sup_{z \in K} |F(z,t_1) - F(z,t_2)| < \varepsilon$$

(pois $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |(z,t_1) - (z,t_2)| < \delta$).



Logo, se $n > 1/\delta$ e $z \in K$,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F(z, \tfrac{k}{n}) - F(z,s)\right) ds \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |F(z,k/n) - F(z,s)|\, ds < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

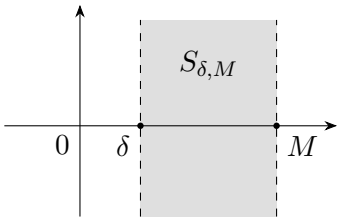
Exemplo 9.2 (Função gama)**.** Se $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\Gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^s \, \frac{dt}{t} \qquad \Big(\text{obs.: } \int_0^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\Big).$$

Mostremos que $\Gamma(s)$ é uma função holomorfa em toda faixa da forma

$$S_{\delta,M} = \{s \in \mathbb{C} : \delta < \sigma < M\}, \qquad s = \sigma + it,$$

com $0 < \delta < M < \infty$.



Dado $s \in S_{\delta,M}$, temos $|e^{-t}t^{s-1}| = e^{-t}t^{\sigma-1}$. Logo, a integral converge absolutamente em s, pois

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{\sigma-1}\,dt &= \int_\varepsilon^1 e^{-t}\underbrace{t^{\sigma-1}}_{\in L^1([0,1])}\,dt + \int_1^{1/\varepsilon}\underbrace{e^{-t}t^{\sigma-1}}_{\in L^1([1,\infty))}\,dt \\ &\leqslant C_1\int_\varepsilon^1 t^{\sigma-1}\,dt + C_2\int_1^{1/\varepsilon} e^{-t/2}\,dt.\end{aligned}$$

Pelo teorema, $F_\varepsilon(s) = \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{s-1}\,dt$ é holomorfa em $S_{\delta,M}$. Resta ver que $F_\varepsilon \to \Gamma$ uniformemente em $S_{\delta,M}$: para $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned}|\Gamma(s) - F_\varepsilon(s)| &\leqslant \int_0^\varepsilon \underbrace{e^{-t}}_{\leqslant 1}\underbrace{t^{\sigma-1}}_{\leqslant t^{\delta-1}}\,dt + \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}\underbrace{t^{\sigma-1}}_{\leqslant t^{M-1}}\,dt \\ &\leqslant \underbrace{\frac{\varepsilon^\delta}{\delta} + C\int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t/2}\,dt}_{\text{não depende de } s} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

Observação 9.3. Transformada de Mellin:

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty f(t)\,t^s\,\frac{dt}{t}.$$

($\Gamma = \mathcal{M}e^{-t}$.)

Exercício 9.4.

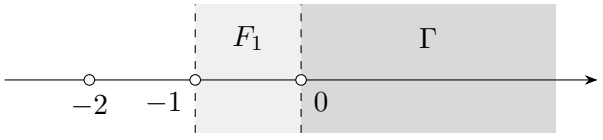
1) Verifique a equação funcional

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

via "integração por partes" ($\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$).

2) Use a equação funcional para mostrar que Γ admite uma continuação analítica para $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

$$\Big(F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad F_2(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{(s+1)s}, \quad \dots\Big)$$



Aula 10

12) Teorema de aproximação de Runge

Questão. Quais condições em um compacto $K \subseteq \mathbb{C}$ garantem que qualquer $f \in \mathcal{O}(K)$ (isto é, f holomorfa em uma vizinhança de K) pode ser uniformemente aproximada por polinômios em K? Isto é, quando é que $\mathbb{C}[z]$ é denso em $\mathcal{O}(K)$ com a norma

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| \, ?$$

Exemplo 10.1. Se $K = \overline{D}_r(z_0)$ e $f \in \mathcal{O}(K)$, então r é menor que o raio de convergência da série de Taylor de f em z_0, e portanto

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n}_{\in \mathbb{C}[z]} \xrightarrow[N \to \infty]{\text{unif.}} f(z)$$

em K.

Exemplo 10.2. Se $K = C_1(0)$ e $f(z) = 1/z$, então *não existe* $(p_n)_n \subseteq \mathbb{C}[z]$ tal que $p_n \to f$ na norma $\|\cdot\|_K$, pois

$$\int_{C_1(0)} p_n(z)\, dz = 0 \quad \forall n \qquad \text{e} \qquad \int_{C_1(0)} f(z)\, dz = 2\pi i \neq 0.$$

Mais precisamente, se $p \in \mathbb{C}[z]$, então

$$2\pi = \left| \int_{C_1(0)} (f(z) - p(z))\, dz \right| \leqslant 2\pi \, \|f - p\|_K \quad \Longrightarrow \quad \|f - p\|_K \geqslant 1.$$

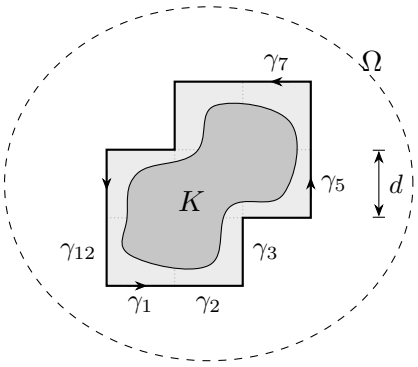
Teorema 10.3 (Runge)**.** *Seja $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto.*

(a) Se $f \in \mathcal{O}(K)$, então f pode ser uniformemente aproximada em K por funções racionais com singularidades em $\mathbb{C} \setminus K$.

(b) Se $\mathbb{C} \setminus K$ é conexo, então $\mathbb{C}[z]$ é denso em $\mathcal{O}(K)$.

Lema 10.4. *Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $K \subseteq \Omega$ é compacto, então existem segmentos $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ em $\Omega \setminus K$ tais que, para todo $z \in K$,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$



Demonstração. Seja $d = c\,d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, com $c < 1/\sqrt{2}$. Considere um ladrilhamento do plano por quadrados (sólidos) de lado d (com lados paralelos aos eixos x, y). Sejam $Q_1, \ldots, Q_M$ os quadrados que intersectam K, e $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ os lados desses quadrados que não pertencem a Q_i e Q_j com $i \neq j$ (isto é, que não são lados comuns a dois desses quadrados), orientados como no bordo de Q_i.

Note que cada $\gamma_i \subseteq \Omega$ (de fato, $x \in \gamma_i \Rightarrow d(x, K) \leqslant \sqrt{2}\,d < d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) \Rightarrow x \notin \mathbb{C} \setminus \Omega \Leftrightarrow x \in \Omega$) e $\gamma_i \cap K = \emptyset$ (caso contrário, γ_i pertenceria a dois quadrados adjacentes que intersectam K).

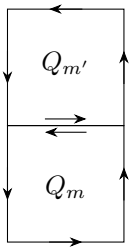
Seja $z \in K$ tal que $z \notin \partial Q_1 \cup \cdots \cup \partial Q_M$. Logo, $z \in \mathring{Q}_j$ para algum j, e segue do teorema de Cauchy (e da fórmula integral de Cauchy) que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \begin{cases} f(z), & m = j, \\ 0, & m \neq j, \end{cases}$$

donde

$$f(z) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

(Se Q_m, $Q_{m'}$ são adjacentes, as integrais sobre o seu lado em comum se cancelam.)



O mesmo argumento vale, na verdade, para todo z no interior de algum Q_j. Como os γ_n estão contidos em $\mathbb{C} \setminus K$, ambos os lados são contínuos em z perto de K; por continuidade, a fórmula acima vale para todo $z \in K$. $\square$

Lema 10.5. *Para todo segmento de reta $\gamma \subseteq \Omega \setminus K$, existe uma sequência de funções racionais com singularidades em γ que aproximam*

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

uniformemente em K.

Demonstração. Se $c\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ é uma parametrização de γ, então

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_0^1 \frac{f(c(t))\,c'(t)}{c(t)-z}\,dt.$$

Como $\gamma \cap K = \emptyset$,

$$F(z,t) = \frac{f(c(t))\,c'(t)}{c(t)-z} \in C^0(K \times [0,1])$$

e, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t_1 - t_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{z\in K} |F(z,t_1) - F(z,t_2)| < \varepsilon.$$

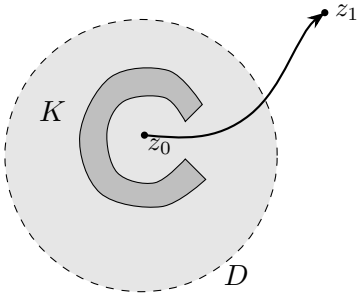
Como na demonstração do teorema da aula passada, as somas de Riemann

$$f_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\Big(z, \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{f(c(k/n))\,c'(k/n)}{c(k/n)-z}$$

convergem uniformemente para $\int_0^1 F(z,t)\,dt$ em K. □

Os lemas 10.4 e 10.5 provam a parte (a) do teorema de Runge.

Lema 10.6. *Se $\mathbb{C}\setminus K$ é conexo e $z_0 \notin K$, então $\dfrac{1}{z-z_0}$ pode ser aproximada uniformemente em K por polinômios.*



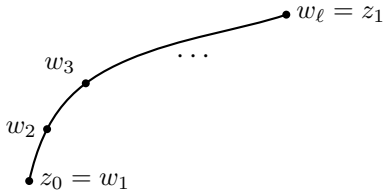
Demonstração. Seja $D = D_R(0)$ tal que $K \subseteq D$, e $z_1 \in \mathbb{C} \setminus D$. Então

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}}_{\text{polinômio}}$$

uniformemente em K. Logo, basta mostrar que $1/(z - z_0)$ pode ser aproximada uniformemente em K por polinômios em $1/(z - z_1)$.

Como $\mathbb{C} \setminus K$ é conexo, seja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ um caminho de z_0 a z_1. Se $\rho = \frac{1}{2}\, d(K, \gamma)$, então $\rho > 0$. Considere uma partição $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ de γ tal que

$$z_0 = w_1, \qquad z_1 = w_\ell \qquad \text{e} \qquad |w_j - w_{j+1}| < \rho \quad \forall j = 1, \ldots, \ell - 1.$$



Se $w \in \gamma$ e $|w' - w| < \rho$, então, para todo $z \in K$,

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - w'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - w'}{z - w'}} = \frac{1}{z - w'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - w')^n}{(z - w')^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - w')^n}{(z - w')^{n+1}},$$

pois

$$\left| \frac{w - w'}{z - w'} \right| < 1 \qquad (|z - w'| \geqslant |z - w| - |w - w'| > 2\rho - \rho = \rho > |w - w'|).$$

Logo, $1/(z - w)$ pode ser uniformemente aproximada em K por polinômios em $1/(z - w')$, desde que $|w - w'| < \rho$.

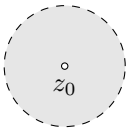
Para concluir, aplique o resultado acima indutivamente na sequência $z_0 = w_1, \ldots, w_\ell = z_1$. □

O lema 10.6 demonstra a parte (b) do teorema (usando a parte (a) e a decomposição de funções racionais em frações parciais).

Aula 11

13) Zeros e polos

Definição 11.1. Uma *singularidade isolada* de uma função f é um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que f está definida em $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, para algum $\varepsilon > 0$, mas f não está definida em z_0.



Um *zero* de f é um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ onde $f(z_0) = 0$.

Observação 11.2. O princípio da continuação analítica implica que os zeros de funções *holomorfas* não triviais (isto é, não identicamente nulas, num aberto conexo) são *sempre isolados*: se $f(z_0) = 0$, então existe uma vizinhança U de z_0 tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$.

Teorema 11.3. *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $z_0 \in \Omega$ é um zero isolado de f, então existem uma vizinhança $U \subseteq \Omega$ de z_0, uma função holomorfa $g\colon U \to \mathbb{C}$ e um* único *$n \geqslant 1$ tais que*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

com $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

Definição 11.4. O inteiro n do teorema é a *ordem* do zero z_0. Se $n = 1$, também dizemos que z_0 é um *zero simples*.

Demonstração do teorema. Em um disco pequeno centrado em z_0,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Como $f \not\equiv 0$ em uma vizinhança de z_0, existe um menor n tal que $a_n \neq 0$ (e $n \geqslant 1$, pois $a_0 = f(z_0) = 0$). Logo,

$$f(z) = (z - z_0)^n \underbrace{\big(a_n + (z - z_0)a_{n+1} + \cdots\big)}_{=:\, g(z)}.$$

Note que g é holomorfa e $g(z_0) = a_n \neq 0$, logo $g(z) \neq 0$ para todo z suficientemente próximo de z_0.

Unicidade de n: seja

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) = (z - z_0)^m h(z),$$

com h holomorfa e $h(z_0) \neq 0$. Se $m > n$, então

$$0 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{m-n} h(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = a_n \neq 0.$$

Absurdo! Se $m < n$, o argumento é análogo. □

Definição 11.5. Uma *vizinhança furada* (em inglês, *deleted neighborhood*) de $z_0 \in \mathbb{C}$ é

$$D_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

para algum $r > 0$.

Definição 11.6. Uma função f definida em uma vizinhança furada de z_0 tem um *polo* em z_0 se

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0, \end{cases}$$

é holomorfa em uma vizinhança de z_0. Em outras palavras, "$1/f$ se estende a uma função holomorfa na vizinhança de z_0 com $1/f(z_0) = 0$".

Exemplo 11.7.

- $\dfrac{1}{z}$ tem um polo em $z = 0$.
- $e^{1/z}$ não tem um polo em $z = 0$ (mas $z = 0$ é uma singularidade isolada), pois $e^{-1/z}$ é ilimitada na vizinhança de 0: tomando $z_n = -1/n$, temos
$$e^{-1/z_n} = e^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Teorema 11.8. *Se f tem um polo em $z_0 \in \Omega$, então existem uma vizinhança $U \subseteq \Omega$ de z_0, uma função holomorfa $h \colon U \to \mathbb{C}$ e um* único *$n \geqslant 1$ tais que*

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z) \qquad (z \in U \setminus \{z_0\}),$$

com $h(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

Demonstração. Por definição, $1/f$ é holomorfa na vizinhança de z_0 e $1/f(z_0) = 0$. Pelo teorema anterior, existem uma vizinhança U de z_0 e $g \colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa tais que

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n g(z),$$

com $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Logo,

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \underbrace{\frac{1}{g(z)}}_{h(z)}.$$ □

Definição 11.9. O inteiro n do teorema é a *ordem* do polo. Se $n = 1$, dizemos que z_0 é um *polo simples*.

Teorema 11.10. *Se f tem um polo de ordem n em z_0, então existem únicos $a_{-j} \in \mathbb{C}$ tais que*

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z),$$

com G holomorfa na vizinhança de z_0.

Demonstração. Se h é como no teorema anterior e

$$h(z) = A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

é a sua série de Taylor, então

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^n}\, h(z) \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^n}\big(A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \cdots\big) \\ &= \frac{\overbrace{A_0}^{a_{-n}}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{\overbrace{A_{n-1}}^{a_{-1}}}{z-z_0} + \underbrace{A_n + A_{n+1}(z-z_0) + \cdots}_{G(z)}. \end{aligned}$$ □

Definição 11.11.

- $\dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z-z_0}$ é a *parte principal* de f no polo z_0.
- $a_{-1} =: \operatorname{Res}_{z=z_0} f$ é o *resíduo* de f em z_0.

Importante.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \operatorname{Res}_{z=z_0} f$$

(C um círculo suficientemente pequeno centrado em z_0, orientado positivamente), pois $\int_C G(z)\,dz = 0$ (Cauchy), $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ e

$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = 0 \quad \text{se } n > 1 \qquad \Big(\frac{1}{(z-z_0)^n} \text{ tem primitiva}\Big).$$

Teorema 11.12. *Se f tem polo de ordem n em z_0, então*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{n-1}(z-z_0)^n f(z).$$

Exemplo 11.13. Se $n = 1$, então $\operatorname{Res}_{z=z_0} f = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Demonstração do teorema. Para $z \neq z_0$ perto de z_0,

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + (z-z_0)^n G(z)$$

$$\implies \quad \Big(\frac{d}{dz}\Big)^{n-1} (z-z_0)^n f(z) = (n-1)!\, a_{-1} + (z-z_0) \underbrace{\widetilde{G}(z)}_{\substack{\text{holomorfa} \\ \text{em } z_0}} . \qquad \square$$

Aula 12

Aula passada. Vimos que, se $f\colon D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e tem um polo em z_0, então

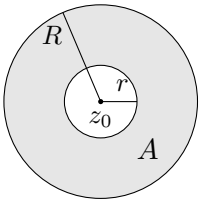
$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots .$$

13) Zeros e polos (cont.)

Mais geralmente, se f é holomorfa na vizinhança de um "anel" $A = \overline{D}_R(z_0) \setminus D_r(z_0)$, então

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{série de Laurent}}$$

no interior de A. (Veja o Problema 3 do Capítulo 3 do Stein–Shakarchi.)



Exemplo 12.1.

$$e^{1/z} = \cdots + \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1$$

tem infinitas potências negativas. Isso implica que 0 não é polo.

Observação 12.2. z_0 é polo $\iff$ a série de Laurent é tal que $a_n = 0$ para $n \ll 0$ (e $a_n \neq 0$ para algum $n < 0$).

Definição 12.3. Se z_0 é uma singularidade isolada de f, com f holomorfa no disco furado $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, e $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ é a sua série de Laurent em $0 < |z-z_0| < r$, o *resíduo* de f em z_0 é

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f = a_{-1}.$$

Quando z_0 é um polo, isso coincide com a definição dada anteriormente.

14) A fórmula de resíduos

Teorema 12.4. *Seja $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa e $\overline{D} \subseteq \Omega$ um disco fechado contendo z_0 em seu interior ($z_0 \in D$). Então*

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f.$$

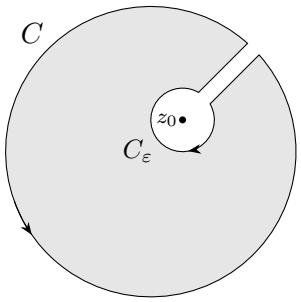
Demonstração. Seja $C = \partial D$ e $C_\varepsilon = C_\varepsilon(z_0)$, com $\varepsilon > 0$ pequeno, ambos orientados positivamente. Usando o "argumento da fechadura", como na demonstração da fórmula integral de Cauchy, obtemos

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

Seja $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ a série de Laurent de f num disco furado em torno de z_0 contendo C_ε. Como essa série converge uniformemente no compacto C_ε, podemos integrar termo a termo:

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{C_\varepsilon} (z-z_0)^n\,dz = 2\pi i\, a_{-1},$$

pois $\int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, enquanto, para $n \neq -1$, $(z-z_0)^n$ tem primitiva $(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$ em $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ e, portanto, $\int_{C_\varepsilon}(z-z_0)^n\,dz = 0$. Logo $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f$. □

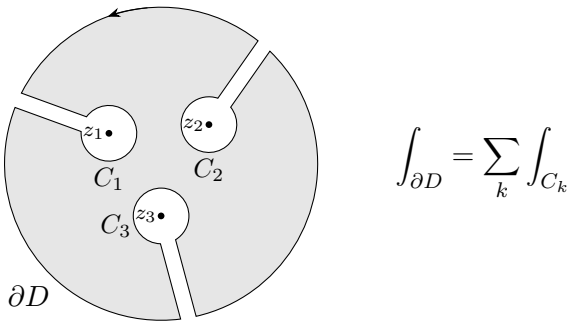


Corolário 12.5. *Suponha $f\colon \Omega \setminus \{z_1,\ldots,z_N\} \to \mathbb{C}$ holomorfa e $\overline{D} \subseteq \Omega$ um disco fechado com $z_1,\ldots,z_N \in D$. Então*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=z_k} f,$$

onde $C = \partial D$.

Demonstração. Repita o argumento acima com uma "fechadura múltipla" (veja a figura abaixo). □



Corolário 12.6. *Vale o mesmo resultado do corolário anterior trocando o círculo por contornos onde vale o teorema de Cauchy (polígonos, setores, fechaduras, semicírculos indentados, etc.):*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=z_k} f.$$

Esta é a "fórmula de resíduos".

Exemplo 12.7. Quanto vale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$?

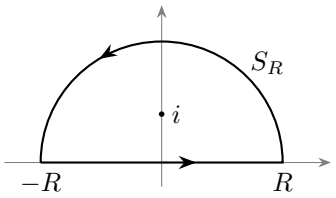
Seja

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}.$$

Note que f é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ e que i, $-i$ são polos *simples*. Logo,

$$\operatorname{Res}_{z=i} f = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{2i}.$$

Seja $R > 1$ e $\gamma_R = S_R \cup [-R, R]$, onde S_R é o semicírculo superior de raio R centrado em 0:



Então

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Mas

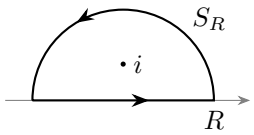
$$\left|\int_{S_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \sup_{z\in S_R} \frac{1}{|z-i|\,|z+i|} \cdot \pi R \leqslant \frac{1}{(R-1)^2} \cdot \pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{dz}{1+z^2} \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big(\underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}}_{\pi} - \underbrace{\int_{S_R} \frac{dz}{1+z^2}}_{\to 0} \Big) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Exemplo 12.8. Quanto vale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$?

A função $\dfrac{\cos z}{1+z^2}$ tem polos em $\pm i$. Mas não podemos aplicar o mesmo argumento, pois "$\cos z$ é grande em S_R":



se $z = x + iy$, então

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}}{2} \quad \Longrightarrow \quad |\cos z| \geqslant \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

(para $y \geqslant 0$; crescimento exponencial com $y = \operatorname{Im} z$). Mas $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e, se $z = x + iy$, então

$$e^{iz} = e^{-y}e^{ix} \quad \Longrightarrow \quad |e^{iz}| \leqslant e^{-y}$$

(decrescimento exponencial!). Em particular, $|e^{iz}| \leqslant 1$ em S_R, e a mesma estimativa do exemplo anterior mostra que $\int_{S_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \to 0$. Fazendo $R \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx}_{=0 \text{ (integrando ímpar)}}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i}\Big(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\Big) = 2\pi i\,\frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Portanto $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}$.

Aula 13

14) A fórmula de resíduos (cont.)

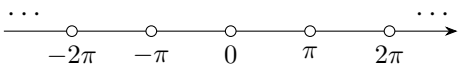
Exemplo 13.1. Quanto vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ ?$$

A função

$$\operatorname{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)}$$

tem polos em $\mathbb{Z}\pi$, e esses polos são simples! De fato, $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ e $\operatorname{sen}'(n\pi) = \cos(n\pi) \neq 0$.



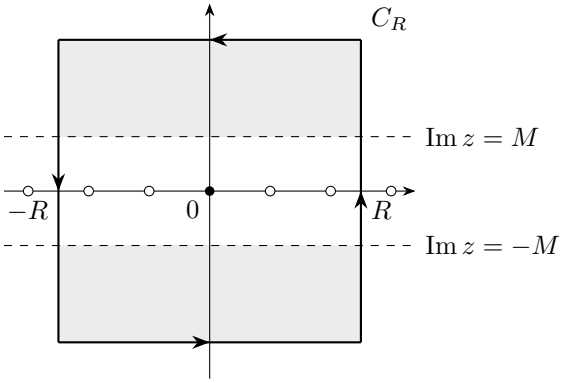
E os resíduos? Como $\operatorname{cotg}(z)$ é π-periódica,

$$\operatorname{Res}_{z=n\pi} \operatorname{cotg}(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{cotg}(z) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1 - \cdots}{z - \cdots} = 1.$$

Considere $f(z) = \dfrac{\operatorname{cotg}(z)}{z^2}$. Ela tem um polo de ordem 3 em $z = 0$ e polos simples em $n\pi$, $n \neq 0$, com resíduo

$$\operatorname{Res}_{z=n\pi} \left(\frac{\operatorname{cotg}(z)}{z^2} \right) = \frac{1}{n^2\pi^2}.$$

Seja $R > 0$, $R \notin \mathbb{Z}\pi$, e seja C_R o quadrado de vértices $\pm R \pm iR$, orientado positivamente.



Pela fórmula de resíduos,

$$\int_{C_R} \frac{\operatorname{cotg}(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i \left(\sum_{\substack{|n\pi|<R \\ n\neq 0}} \frac{1}{n^2\pi^2} + \operatorname{Res}_{z=0}\left(\frac{\operatorname{cotg}(z)}{z^2}\right)\right).$$

Por outro lado, como C_R tem comprimento $8R$ e $|z| \geqslant R$ em C_R,

$$\left|\int_{C_R} \frac{\operatorname{cotg}(z)}{z^2}\,dz\right| \leqslant 8R \sup_{z\in C_R} \frac{|\operatorname{cotg}(z)|}{R^2} = \frac{8}{R} \sup_{z\in C_R} |\operatorname{cotg}(z)|.$$

Se $z = x + iy$,

$$\operatorname{cotg}(z) = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\left(\frac{e^{-2y}\,e^{2ix}+1}{e^{-2y}\,e^{2ix}-1}\right), \qquad |e^{2ix}| = 1.$$

- Se $y \gg 0$, $\operatorname{cotg}(x+iy)$ está próximo de $-i$; se $y \ll 0$, está próximo de i (uniformemente em x).
- Se $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, então $e^{2ix} = -1$ e

  $$\operatorname{cotg}(x+iy) = -i\left(\frac{1-e^{-2y}}{1+e^{-2y}}\right)$$

  tem módulo $\leqslant 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Conclusão: existe um $C > 0$ tal que, se $R_N = N\pi + \frac{\pi}{2}$ $(N \geqslant 0)$, então

$$\sup_{z\in C_{R_N}} |\operatorname{cotg}(z)| \leqslant C \qquad \text{para todo } N \geqslant 0,$$

com C independente do raio! Fazendo $N \to \infty$ (logo $R_N \to \infty$), obtemos

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} \frac{1}{n^2\pi^2} + \operatorname{Res}_{z=0}\left(\frac{\operatorname{cotg}(z)}{z^2}\right) = 0.$$

Resta calcular o resíduo em 0:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}\frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} &= \frac{1}{z^2}\,\frac{1 - z^2/2 + z^4/24 - \cdots}{z - z^3/6 + z^5/5! - \cdots} \\ &= \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Escrevendo $\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots\right)^{-1} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$, temos

$$\begin{aligned}1 &= (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots\right) \\ &= c_0 + c_1 z + \left(-\frac{c_0}{6} + c_2\right) z^2 + \cdots,\end{aligned}$$

donde $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{6}$, $\ldots$ Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2}\frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)} &= \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{6} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^3}\left(1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)}_{-1/3} z^2 + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} + \cdots.\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Res}_{z=0}(\operatorname{cotg}(z)/z^2) = -\frac{1}{3}$ e obtemos

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{3} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercício 13.2. Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots.$$

(Dica: use $\sec(z)$.)

Aula 14

15) Tipos de singularidade

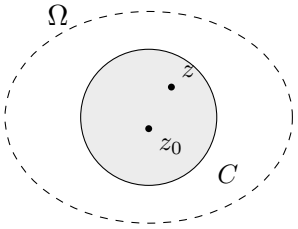
Seja $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa.

Definição 14.1. Dizemos que z_0 é uma *singularidade removível* de f se f se estende a uma função holomorfa em Ω. (Por abuso, essa extensão também é denotada por f.)

Observação 14.2. z_0 é um polo de f se, e somente se, z_0 é uma singularidade removível de $1/f$ e $1/f(z_0) = 0$.

Teorema 14.3 (Riemann)**.** *Se f é limitada em uma vizinhança furada de z_0, então z_0 é uma singularidade removível de f.*

Demonstração. Seja $\overline{D} = \overline{D}_r(z_0) \subseteq \Omega$ e $C = \partial D$.



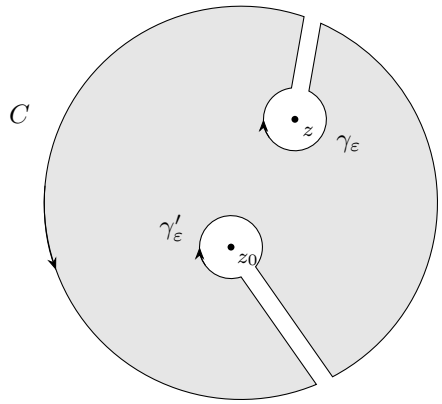
A ideia é mostrar que, se $z \in D \setminus \{z_0\}$, então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \qquad (*)$$

Como o lado direito define uma função holomorfa em D, isso dá a extensão desejada.

Seja $g(w, z) = \dfrac{f(w)}{w - z} \in C^0(C \times D)$. Como $z \mapsto g(w, z)$ é holomorfa em D para todo $w \in C$, a integral $\int_C g(w, z)\, dw$ é holomorfa em D.

Fixado $z \in D \setminus \{z_0\}$, considere a fechadura dupla da figura, com círculos $\gamma_\varepsilon = C_\varepsilon(z)$ e $\gamma'_\varepsilon = C_\varepsilon(z_0)$.



Pelo teorema de Cauchy (aplicado à fechadura), temos

$$\int_C g(w,z)\,dw - \int_{\gamma_\varepsilon} g(w,z)\,dw - \int_{\gamma'_\varepsilon} g(w,z)\,dw = 0$$

para $\varepsilon > 0$ pequeno. Pela fórmula integral de Cauchy, $\int_{\gamma_\varepsilon} g(w,z)\,dw = 2\pi i\, f(z)$. Como f é limitada numa vizinhança de z_0, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{w\in\gamma'_\varepsilon} |g(w,z)| \leqslant C$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo,

$$\left|\int_{\gamma'_\varepsilon} g(w,z)\,dw\right| \leqslant C\cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

e obtemos $(*)$. □

Corolário 14.4. *z_0 é um polo de f se, e somente se, $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.* □

Há, portanto, três tipos de singularidades (isoladas):

- *removíveis* (f limitada perto de z_0);
- *polos* ($|f(z)| \to \infty$ se $z \to z_0$);
- *essenciais* (não é removível, nem polo).

Exemplo 14.5. 0 é uma singularidade removível de $\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ e uma singularidade essencial de $e^{1/z}$.

Observação 14.6. Caracterização via séries de Laurent: escrevendo $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ perto de z_0,

- removível: $a_n = 0$ para todo $n \leqslant -1$;
- polo: existe $k \leqslant -1$ tal que $a_k \neq 0$ e $a_n = 0$ para todo $n < k$;
- essencial: existem infinitos $n \leqslant -1$ tais que $a_n \neq 0$.

Teorema 14.7 (Casorati–Weierstrass)**.** *Se z_0 é uma singularidade essencial de f, então $f(\Omega \setminus \{z_0\})$ é denso em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Se não, existem $w \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$ tais que

$$|f(z) - w| \geqslant \delta \qquad \text{para todo } z \in \Omega \setminus \{z_0\}.$$

Logo, $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w}$ é holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$ e $\sup_{z \in \Omega \setminus \{z_0\}} |g(z)| \leqslant \frac{1}{\delta}$. Pelo teorema de Riemann, z_0 é uma singularidade removível de g.

- Se $g(z_0) \neq 0$, então z_0 também é uma singularidade removível de $f = w + 1/g$. Absurdo.
- Se $g(z_0) = 0$, então z_0 é um polo de f. Absurdo. □

Observação 14.8. Picard: "f atinge todos os valores de $\mathbb{C}$ infinitas vezes, com possivelmente uma única exceção."

16) Funções meromorfas

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto.

Definição 14.9. Uma *função meromorfa* em Ω é uma função holomorfa $f \colon \Omega \setminus S \to \mathbb{C}$, onde $S \subseteq \Omega$ é um conjunto discreto e todo ponto de S é um polo de f. Ou seja: "função holomorfa, a menos de polos".

Exemplo 14.10. Toda função racional é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$.

Observação 14.11. É um teorema que toda função meromorfa f em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é da forma $f = g/h$, com $g, h \colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfas. (Veja "produto infinito de Weierstrass" para o caso $\Omega = \mathbb{C}$.) Algebricamente, o conjunto das funções meromorfas em Ω (conexo) forma um corpo isomorfo a $\operatorname{Frac} \mathcal{O}(\Omega)$.

Exemplo 14.12. A função

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt \qquad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

se estende a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujas únicas singularidades são polos simples em $s = 0, -1, -2, \ldots$, com resíduos

$$\operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Escreva

$$\Gamma(s) = \underbrace{\int_0^1 e^{-t}\, t^{s-1}\, dt}_{I_1(s)} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, dt}_{I_2(s)}.$$

A integral $I_2(s)$ define uma função inteira. Se $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \int_0^1 e^{-t}\, t^{s-1}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \right) t^{s-1}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n\, t^{n+s-1}}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{n+s}\, t^{n+s} \right]_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+s)}. \end{aligned}$$

Esta série converge uniformemente nos compactos de $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ e define uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com parte principal em $s = -n$ igual a

$$\underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{\text{resíduo}} \cdot \frac{1}{s - (-n)}.$$

Observação 14.13. A equação funcional $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, válida para $\mathrm{Re}(s) > 0$, se estende a todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ pelo princípio da continuação analítica.

Aula 15

16) Funções meromorfas (cont.)

Observação 15.1. $\Gamma(s)$ nunca se anula! Há (pelo menos) três maneiras de ver isso:

1. Pela "fórmula de reflexão":
$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi s)}$$
(Stein–Shakarchi, cap. 6, Teorema 1.4).

2. Pelo produto infinito...

3. Diretamente da integral: dado s com $\operatorname{Re}(s) > 0$,
$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, t^{s-1}\, dt$$
é uma função holomorfa em $\operatorname{Re}(z) > 0$ tal que $F(x) = \Gamma(s)/x^s$ se $x > 0$. Se $\Gamma(s) = 0$, então F é identicamente nula. Tomando $z = 1 + 2\pi i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, obtemos
$$0 = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{s-1}\, e^{-2\pi i t\xi}\, dt = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i t\xi}\, dt}_{\hat{f}(\xi)},$$
onde
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-t}\, t^{s-1}, & t > 0. \end{cases}$$
Pelo teorema de inversão de Fourier,
$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i t\xi}\, d\xi \equiv 0.$$
Absurdo!

Exemplo 15.2. O exercício da P1 mostra que
$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!\,(s+n-1)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx}_{\text{inteira}}$$
em $\mathbb{C} \setminus \{1, 0, -1, -2, \dots\}$, onde B_n são os números de Bernoulli. Segue que $\zeta(s)$ se estende a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cuja única singularidade é um polo simples em $s = 1$ com resíduo 1. De fato, lembrando que
$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\tfrac{1}{2}, \qquad B_2 = \tfrac{1}{6}, \qquad B_n = 0 \text{ para } n \geqslant 3 \text{ ímpar},$$
a tabela abaixo dá a ordem (ord) de cada função em $s = n$:

n	1	0	-1	-2	-3	-4	$\cdots$
Γ	0	-1	-1	-1	-1	-1	$\cdots$
$\Gamma\zeta$	-1	-1	-1	0	-1	0	$\cdots$
$\zeta = \Gamma\zeta/\Gamma$	-1	0	0	1	0	1	$\cdots$

Também segue da expressão acima que ζ tem zeros em $s = -2, -4, -6, \ldots$, ditos *zeros triviais* de ζ.

Observação 15.3. A *hipótese de Riemann* é a conjectura de que todos os *outros* zeros de ζ satisfazem $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Observação 15.4. $\zeta(-1), \zeta(-3), \zeta(-5), \ldots \neq 0$. Como ambas Γ e $\Gamma\zeta$ têm polos simples em $1 - 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, obtemos

$$\zeta(1-2k) = \frac{\mathrm{Res}_{s=1-2k}(\Gamma\zeta)}{\mathrm{Res}_{s=1-2k}\,\Gamma} = \frac{B_{2k}/(2k)!}{(-1)^{2k-1}/(2k-1)!} = -\frac{B_{2k}}{2k}.$$

Por exemplo, $\zeta(-1) = -B_2/2 = -\frac{1}{12}$.

Produto infinito do seno.

Teorema 15.5. *Para todo $z \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{\mathrm{sen}(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

(produto absolutamente convergente).

Demonstração. Sejam $G(z) = \mathrm{sen}(\pi z)/\pi$ e $P(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$. Basta mostrar que

$$G'(z)/G(z) = P'(z)/P(z) \qquad (**)$$

pois, neste caso,

$$\frac{(G/P)'}{G/P} = \frac{G'}{G} - \frac{P'}{P} = 0 \implies (G/P)' = 0 \implies G = cP \text{ para algum } c \in \mathbb{C}.$$

Mas $G'(0) = P'(0) = 1$, logo $c = 1$.

Seja $F(z) = G'(z)/G(z) = \pi\,\mathrm{cotg}(\pi z)$. Vimos que

$$\tilde{F}(z) \coloneqq \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leqslant N} \frac{1}{z+n} =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n}.$$

(Esta última é uma "soma de Eisenstein"; veja A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*.)

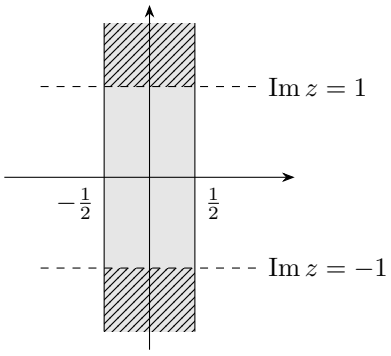
Note que F é periódica, com período 1, e $\tilde{F}$ também:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z+1) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leqslant N} \frac{1}{z+1+n} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{|n|\leqslant N} \frac{1}{z+n} + \underbrace{\frac{1}{z+N+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{z-N}}_{\to 0} \right) = \tilde{F}(z).\end{aligned}$$

Além disso, ambas F e $\tilde{F}$ são funções meromorfas em $\mathbb{C}$ com polos simples em $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ e resíduos $\operatorname{Res}_{z=n} F = \operatorname{Res}_{z=n} \tilde{F} = 1$. Em particular,

$$\Delta(z) = F(z) - \tilde{F}(z)$$

define uma função inteira (as singularidades em $\mathbb{Z}$ são removíveis), periódica de período 1.



Queremos mostrar que $\Delta(z) \equiv 0$. Como $\Delta(0) = 0$ (exercício), pelo teorema de Liouville basta mostrar que Δ é limitada em $\mathbb{C}$. Mas, pela periodicidade, basta mostrar que $\Delta(z)$ é limitada em $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant \frac{1}{2}$ e, para isso, basta controlar $|\Delta(z)|$ quando $|\mathrm{Im}(z)| > 1$ (o retângulo $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant \frac{1}{2}$, $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant 1$ é compacto).

Se $z = x + iy$, com $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ e $y > 1$, então

$$\operatorname{cotg}(\pi z) = i\,\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i\,\frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} = i\,\frac{e^{-2\pi y}\, e^{2\pi i x} + 1}{e^{-2\pi y}\, e^{2\pi i x} - 1},$$

logo

$$\frac{|F(z)|}{\pi} = |\operatorname{cotg}(\pi z)| \leqslant \frac{e^{-2\pi y} + 1}{1 - e^{-2\pi y}} < \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}}.$$

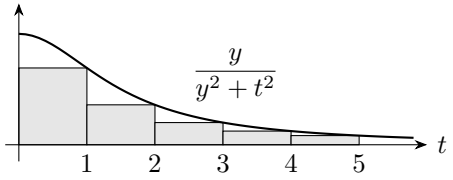
Além disso,

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \underbrace{\frac{1}{x+iy}}_{|\cdot|\leqslant 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x+iy)}{x^2 - y^2 - n^2 + 2ixy}.$$

Como $|x^2-y^2-n^2+2ixy| \geqslant y^2+n^2-x^2 \geqslant \frac{1}{C'}(y^2+n^2)$ para uma constante $C'>0$ (por exemplo $C'=\frac{4}{3}$),

$$\begin{aligned}
|\tilde{F}(z)| &\leqslant 1 + C' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(\frac{1}{2}+y\right)}{y^2+n^2} \\
&\leqslant \underbrace{1 + C' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}}_{C} + 2C' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2+n^2} \\
&\leqslant C + 2C' \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2+t^2}\, dt = C + 2C' \int_0^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} \qquad (t=ys),
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade comparamos a soma com a integral da função decrescente $t \mapsto y/(y^2+t^2)$:



Assim F e $\tilde{F}$, e portanto Δ, são limitadas em $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, $y>1$. Um argumento similar funciona para $y<-1$. □

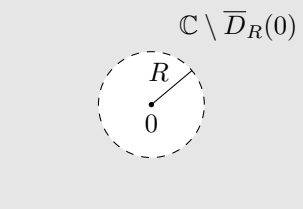
Aula 16

17) A esfera de Riemann

Sejam $R > 0$ e $f\colon \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R(0) \to \mathbb{C}$ holomorfa. Denote

$$F\colon D_{1/R}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto f(1/z)$$

(note que $0 < |z| < 1/R \iff 1/|z| > R$).



Definição 16.1. Dizemos que f tem *polo* (resp. *singularidade essencial*, resp. *singularidade removível*) *no infinito* se F tem polo (resp. singularidade essencial, resp. singularidade removível) em 0. No último caso, também dizemos que f é *holomorfa no infinito*.

Exemplo 16.2.

- $f(z) = z^{2026} + 1$ tem polo no infinito (de ordem 2026): $f(1/z) = \dfrac{1}{z^{2026}} + 1$.
- $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ é holomorfa no infinito (com um zero de ordem 1 lá!):

$$f(1/z) = \frac{1/z}{1/z^2+1} = \frac{z}{1+z^2}.$$

- e^z tem singularidade essencial no infinito.

Definição 16.3. Uma função *meromorfa no plano estendido* (ou *na esfera de Riemann*) é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ que tem um polo ou uma singularidade removível no infinito.

Exemplo 16.4. Funções racionais.

Teorema 16.5. *Toda função f meromorfa no plano estendido é uma função racional.*

Demonstração. Seja $R > 0$ tal que f é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R(0)$. Como $\overline{D}_R(0)$ é compacto, f tem um número finito de polos em $\overline{D}_R(0)$ (o conjunto de polos é discreto), digamos $z_1, \ldots, z_n$. Perto de cada z_k,

$$f(z) = f_k(z) + g_k(z),$$

onde $f_k \in \frac{1}{z-z_k}\mathbb{C}\big[\frac{1}{z-z_k}\big]$ é a parte principal e g_k é holomorfa (numa vizinhança de z_k).

Analogamente, perto de 0,

$$f(1/z) = \tilde{f}_\infty(z) + \tilde{g}_\infty(z),$$

onde $\tilde{f}_\infty \in \frac{1}{z}\mathbb{C}\big[\frac{1}{z}\big]$ é a parte principal e $\tilde{g}_\infty$ é holomorfa. (Se f é holomorfa no infinito, tomamos $\tilde{f}_\infty = 0$.) Seja $f_\infty(z) = \tilde{f}_\infty(1/z) \in \mathbb{C}[z]$ e

$$H \coloneqq f - f_\infty - \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Note que H tem singularidade removível em todo z_k e, portanto, define uma função inteira. Além disso,

$$H(1/z) = f(1/z) - \tilde{f}_\infty(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(1/z)$$

tem singularidade removível em 0, o que implica que $H(z)$ é limitada quando $z \to \infty$. Logo, H é inteira e limitada, portanto constante pelo teorema de Liouville. Assim, $f = H + f_\infty + \sum_k f_k$ é racional. □

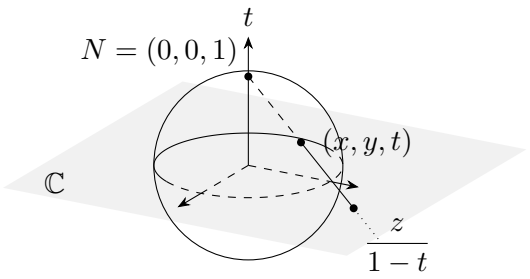
Observação 16.6. A função zeta ζ tem singularidade essencial no infinito. (Γ não tem singularidade *isolada* no infinito: seus polos $0, -1, -2, \ldots$ se acumulam no infinito.)

Interpretação geométrica do plano estendido. O "plano complexo estendido" ou "esfera de Riemann" é a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Notações:

$$\mathbb{C}^* = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{S} = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1 = \cdots$$

Os conjuntos da forma $(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R(0)) \cup \{\infty\}$ formam uma base de vizinhanças de ∞ ("discos abertos centrados no ∞").

$\mathbb{S}$ é homeomorfo a $S^2 = \{(x, y, t) : x^2 + y^2 + t^2 = 1\}$ pela *projeção estereográfica*:



Identificando $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ e escrevendo $z = x + iy$ (de modo que os pontos de S^2 são os (z,t) com $|z|^2 + t^2 = 1$), definimos

$$\pi\colon S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (x,y,t) = (z,t) \longmapsto \frac{z}{1-t}.$$

De fato, a reta por N e (x,y,t) é dada por

$$(0,0,1) + \lambda\big((x,y,t) - (0,0,1)\big) = \big(\lambda x, \lambda y, 1 + \lambda(t-1)\big),$$

e $1 + \lambda(t-1) = 0 \iff \lambda = \dfrac{1}{1-t}$. Obtemos assim bijeções

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{S}, \quad (z,t) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{z}{1-t}, & t \neq 1, \\ \infty, & t = 1, \end{cases} \qquad \mathbb{S} \longrightarrow S^2, \quad z \longmapsto \text{exercício.}$$

(Note: $(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R(0)) \cup \{\infty\}$ corresponde a uma calota centrada em $N \cong \infty$.)

Observe que $\mathbb{S} \setminus \{0\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ é uma "outra cópia de $\mathbb{C}$", com "coordenada $1/z$":

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{homeo}} \mathbb{S} \setminus \{0\}, \qquad z \longmapsto \begin{cases} 1/z, & z \neq 0, \\ \infty, & z = 0. \end{cases}$$

Isto é, $\mathbb{S}$ é a união de duas cópias de $\mathbb{C}$ (uma centrada em 0 e outra no ∞) recoladas ao longo de $z \mapsto 1/z$:

$$\mathbb{S} \cong (\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C})/\!\sim, \qquad (z,1) \sim (w,2) \iff z, w \neq 0,\ z = 1/w.$$

Isto define uma "estrutura complexa" em $\mathbb{S}$, de forma que:

- Uma função meromorfa em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ corresponde a uma aplicação holomorfa $f\colon \Omega \to \mathbb{S}$ (os polos são levados em ∞, isto é, no polo norte!). De fato, perto de um polo $w \in \Omega$ de f, temos $f(z) = (z-w)^{-n} g(z)$, com $g(w) \neq 0$, e então

  $$\frac{1}{f(z)} = (z-w)^n \frac{1}{g(z)}$$

  é holomorfa.

- Uma função meromorfa no plano estendido corresponde a uma aplicação holomorfa $f\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$.

Aula 17

18) O princípio do argumento

Sejam f meromorfa em Ω e $\overline{D} \subseteq \Omega$ um disco fechado.

Teorema 17.1 (Princípio do argumento)**.** *Se f não tem zeros nem polos em ∂D, então*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \#\{\textit{zeros de } f \textit{ em } D\} - \#\{\textit{polos de } f \textit{ em } D\},$$

onde zeros e polos são contados com multiplicidade.

Observação 17.2. Escrevemos

$$\log f(z) = \underbrace{\log|f(z)|}_{\text{bem definido}} + i \underbrace{\arg(f(z))}_{\substack{\text{múltiplos valores}\\ \text{(bem definido a menos de } 2\pi)}},$$

uma "função multivalorada", com $(\log f(z))' = f'(z)/f(z)$. Assim,

$$\frac{1}{i}\int_{\partial D}\frac{f'}{f}\,dz$$

mede a variação do argumento de $f(z)$ ao longo de uma volta em ∂D.

Demonstração. Se f tem zero de ordem n em $w \in D$, então, perto de w, $f(z) = (z-w)^n g(z)$, com g holomorfa e $g(z) \neq 0$ para todo z. Logo,

$$\frac{f'}{f} = \frac{n}{z-w} + \underbrace{\frac{g'}{g}}_{\text{hol.}} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{Res}_{z=w}\Big(\frac{f'}{f}\Big) = n.$$

Similarmente, se f tem polo de ordem n em w, então $\operatorname{Res}_{z=w}(f'/f) = -n$. Pelo teorema dos resíduos,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'}{f}\,dz = \sum_w \operatorname{Res}_{z=w}(f'/f) = \#\{\text{zeros}\} - \#\{\text{polos}\}. \qquad \square$$

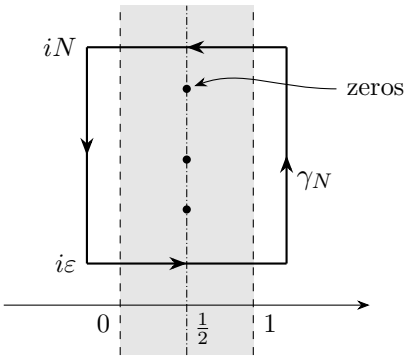
Observação 17.3. Também vale para os contornos usuais (polígonos, setores, etc.).

Aplicação. Como verificar a hipótese de Riemann experimentalmente no computador? Sabendo que:

(1) todos os zeros não triviais de ζ estão na faixa crítica $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ e satisfazem $|\operatorname{Im}(s)| > \varepsilon$ (com $\varepsilon > 0$ explícito);

(2) se s é um zero não trivial de ζ, então $\zeta(1-s)=0$,

basta procurá-los dentro de contornos da forma



Considere

$$\xi(s) = \underbrace{\pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)}_{\text{sem zeros}}\,\zeta(s).$$

Fato: $\xi(\frac{1}{2}+it)\in\mathbb{R}$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

Logo, se $f(t)=\xi(\frac{1}{2}+it)$ alterna o sinal n vezes em $[\varepsilon,N]$, então f tem pelo menos n zeros em $[\varepsilon,N]$ (e, portanto, ξ tem pelo menos n zeros em $[\frac{1}{2}+i\varepsilon,\frac{1}{2}+iN]$).

Algoritmo:

(1) Calcule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_N}\frac{\xi'}{\xi}\,ds = n$$

(número de zeros dentro de γ_N).

(2) Verifique se f alterna de sinal n vezes em $[\varepsilon,N]$.

Se sim, necessariamente todos os zeros de ζ com $0<|\mathrm{Im}(s)|<N$ (são simples e) satisfazem $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$. Se não, este teste é inconclusivo!

Observação 17.4. Para uma implementação deste algoritmo em Python (com as bibliotecas SymPy e mpmath), veja o texto de Aaron Meurer, *Verifying the Riemann Hypothesis with SymPy and mpmath* (2020), disponível em

`https://www.asmeurer.com/blog/posts/verifying-the-riemann-hypothesis-with-sympy-and-mpmath/`

Teorema 17.5 (Rouché)**.** *Se f e g são holomorfas numa vizinhança de um disco fechado $\overline{D}$ e*

$$|f(z)|>|g(z)| \qquad \forall z\in\partial D,$$

então f e $f+g$ têm o mesmo número de zeros (com multiplicidade) em D.

("$f+g$ é uma perturbação holomorfa de f".)

Demonstração. Para $t \in [0,1]$, seja

$$f_t(z) = f(z) + tg(z)$$

e $n_t = \#\{\text{zeros de } f_t \text{ em } D\} \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $t \mapsto n_t$ é constante. Basta mostrar que é contínua. Como f_t não se anula em ∂D

$$\big(z \in \partial D \implies |f_t(z)| \geqslant |f(z)| - t|g(z)| \geqslant |f(z)| - |g(z)| > 0\big),$$

segue do princípio do argumento que

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\, dz,$$

e agora basta observar que

$$\frac{f_t'(z)}{f_t(z)} = \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}$$

é contínua em (z,t). □

Exemplo 17.6. $p(z) = z^5 - 4z + 2$. Localização das raízes?

- $f(z) = z^5$, $g(z) = -4z + 2$. Se $|z| = 2$, $|f(z)| = 2^5 = 32$ e $|g(z)| \leqslant 4 \cdot 2 + 2 = 10$, logo $|f(z)| > |g(z)|$. Por Rouché, $p(z)$ tem 5 raízes (com multiplicidade) em $D_2(0)$.
- $f(z) = -4z$, $g(z) = z^5 + 2$. Se $|z| = 1$, $|f(z)| = 4$ e $|g(z)| \leqslant 3$, logo $|f(z)| > |g(z)|$. Por Rouché, $p(z)$ tem 1 raiz em $D_1(0)$.

(Portanto p tem 4 raízes em $D_2(0) \setminus D_1(0)$.)

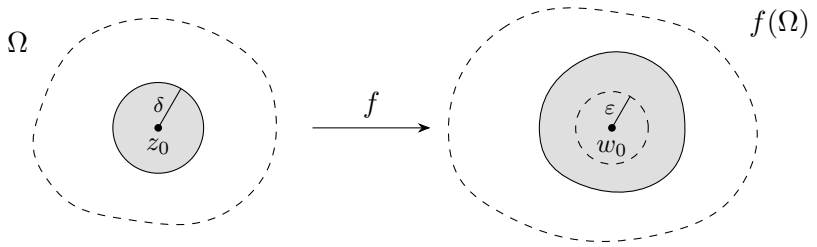
Teorema 17.7 (da aplicação aberta)**.** *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e não constante, então f é aberta.*

Demonstração. Basta mostrar que $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ é aberto (dado $U \subseteq \Omega$ aberto, considere $f|_U$). Sejam $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = f(z_0)$. Dado $w \in \mathbb{C}$, defina

$$g_w(z) = f(z) - w = \underbrace{(f(z) - w_0)}_{F(z)} + \underbrace{(w_0 - w)}_{G(z)}.$$

(Ideia: mostrar que, para todo w próximo de w_0, g_w tem um zero.)

Tome $\delta > 0$ tal que $\overline{D}_\delta(z_0) \subseteq \Omega$ e $f(z) \neq w_0$ em $C_\delta(z_0)$ (possível pois os zeros de $f - w_0$ são isolados).



Tome $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - w_0| \geqslant \varepsilon$ em $C_\delta(z_0)$. Se $|w - w_0| < \varepsilon$, então, para $z \in C_\delta(z_0)$,

$$|F(z)| = |f(z) - w_0| \geqslant \varepsilon > |w - w_0| = |G(z)|.$$

Pelo teorema de Rouché, $g_w(z) = F(z) + G(z)$ tem pelo menos um zero em $D_\delta(z_0)$ (pois F tem pelo menos um, em z_0), logo $w \in f(\Omega)$. Isto mostra que $D_\varepsilon(w_0) \subseteq f(\Omega)$. □

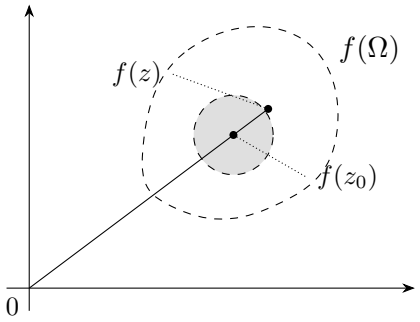
Exemplo 17.8. Não existe função holomorfa não constante $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $P(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \equiv \text{const.}$, onde $P(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \backslash \mathbb{R}$ (pois P seria constante no aberto $f(\Omega)$). Exemplos: $P = x$, $P = y$, $P = x^2 + y^2$, etc.

Aula 18

18) O princípio do argumento (cont.)

Teorema 18.1 (Princípio do módulo máximo)**.** *Se $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e não constante, então $|f|$ não atinge um máximo em Ω.*

Demonstração. Seja $z_0 \in \Omega$. Como $f(\Omega)$ é aberto, existe um disco $D_\varepsilon(f(z_0)) \subseteq f(\Omega)$ e, portanto, um $z \in \Omega$ tal que $|f(z)| > |f(z_0)|$.



□

Corolário 18.2. *Se $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ é compacto e f se estende continuamente a $\overline{\Omega}$, então*

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega}|f(z)|.$$

19) Homotopia

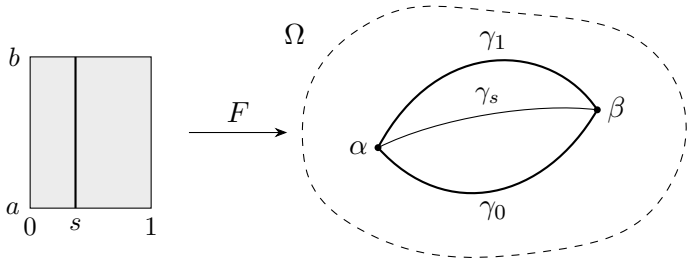
Sejam γ_0, γ_1 curvas em um aberto Ω, parametrizadas por $\gamma_0(t), \gamma_1(t)$ em $[a, b]$, tais que

$$\gamma_0(a) = \alpha = \gamma_1(a), \qquad \gamma_0(b) = \beta = \gamma_1(b).$$

Definição 18.3. γ_0 e γ_1 são *homotópicas em* Ω se existe uma função contínua

$$F\colon [0,1] \times [a,b] \longrightarrow \Omega$$

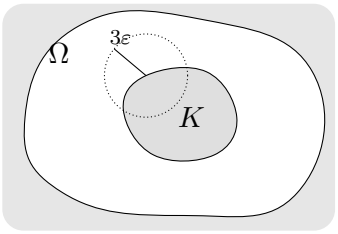
tal que, para todo $s \in [0,1]$, $\gamma_s(t) \coloneqq F(s,t)$ parametriza uma curva γ_s satisfazendo $\gamma_s(a) = \alpha$ e $\gamma_s(b) = \beta$, e $\gamma_0(t) = F(0,t)$, $\gamma_1(t) = F(1,t)$.



Teorema 18.4. *Seja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Se γ_0, γ_1 são curvas homotópicas em Ω, então*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

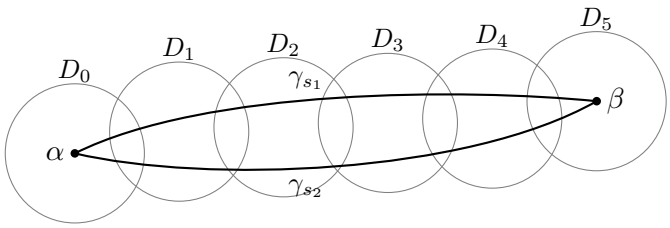
Demonstração. Como $K \coloneqq F([0,1] \times [a,b]) \subseteq \Omega$ é compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geqslant 3\varepsilon$.



Como F é uniformemente contínua em $[0,1] \times [a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|s_1 - s_2| < \delta \implies \sup_{t \in [a,b]} |\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < \varepsilon.$$

Tome s_1, s_2 com $|s_1 - s_2| < \delta$ e escolha discos $D_0, D_1, \ldots, D_n$ de raio 2ε (contidos em Ω) e pontos $z_0 = \alpha, z_1, \ldots, z_{n+1} = \beta$ em γ_{s_1} e $w_0 = \alpha, w_1, \ldots, w_{n+1} = \beta$ em γ_{s_2} tais que $\bigcup_{i=0}^{n} D_i$ cobre $\gamma_{s_1} \cup \gamma_{s_2}$ e $z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i$; mais precisamente, de modo que o arco de γ_{s_1} de z_i a z_{i+1} e o arco de γ_{s_2} de w_i a w_{i+1} estejam contidos em D_i.



Em cada D_i, seja F_i uma primitiva de f. Logo, em $D_i \cap D_{i+1}$ (que é conexo), existe $c_i \in \mathbb{C}$ tal que $F_{i+1} - F_i = c_i$. Como $z_{i+1}, w_{i+1} \in D_i \cap D_{i+1}$,

$$\begin{aligned} & F_{i+1}(z_{i+1}) - F_i(z_{i+1}) = F_{i+1}(w_{i+1}) - F_i(w_{i+1}) \\ \iff\ & F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}) = F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_{s_1}} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{s_2}} f(z)\,dz \\
&\quad= \sum_{i=0}^{n} \big(F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)\big) - \sum_{i=0}^{n} \big(F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)\big) \\
&\quad= \sum_{i=0}^{n} \Big(\big(F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})\big) - \big(F_i(z_i) - F_i(w_i)\big)\Big) \\
&\quad= \big(F_0(z_1) - F_0(w_1)\big) - \big(F_0(z_0) - F_0(w_0)\big) \\
&\qquad\quad + \big(F_1(z_2) - F_1(w_2)\big) - \big(F_1(z_1) - F_1(w_1)\big) + \cdots \\
&\qquad\quad + \big(F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1})\big) - \big(F_n(z_n) - F_n(w_n)\big) \\
&\quad= F_n(\underbrace{z_{n+1}}_{\beta}) - F_n(\underbrace{w_{n+1}}_{\beta}) - \big(F_0(\underbrace{z_0}_{\alpha}) - F_0(\underbrace{w_0}_{\alpha})\big) \\
&\quad= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos que $F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1}) = F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1})$ para cancelar os termos intermediários. Assim, $s \mapsto \int_{\gamma_s} f(z)\,dz$ é constante em intervalos de comprimento $< \delta$ e, portanto, em $[0,1]$. □

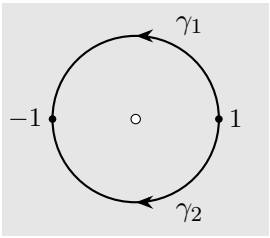
Definição 18.5. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é *simplesmente conexo* se é conexo e quaisquer duas curvas em Ω com mesmos pontos inicial e final são homotópicas em Ω.

Exemplo 18.6. Todo Ω convexo (e.g. disco) é simplesmente conexo:

$$\gamma_s(t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

Exemplo 18.7. Os interiores dos contornos usuais (polígonos, setores, ...) são simplesmente conexos.

Exemplo 18.8. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ não é simplesmente conexo. Sejam $\gamma_1(t) = e^{it}$ e $\gamma_2(t) = e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$, ambas de 1 a -1.

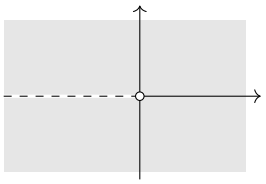


Temos

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = \pi i \;\neq\; \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{-ie^{-it}}{e^{-it}}\,dt = -\pi i,$$

logo γ_1 e γ_2 não são homotópicas em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exemplo 18.9. $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ é simplesmente conexo.



Exercício 18.10. Prove!

Teorema 18.11 (Cauchy)**.** *Se Ω é simplesmente conexo e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa, então*

(1) f admite uma primitiva em Ω;

(2) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda curva fechada $\gamma \subseteq \Omega$.

Demonstração. Fixe $z_0 \in \Omega$ e defina

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,dw,$$

onde γ é uma curva qualquer de z_0 a z. F está bem definida pois Ω é simplesmente conexo (pelo teorema anterior). F é uma primitiva de f pois

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw$$

e

$$\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw = \frac{1}{h}\underbrace{\int_{[z,z+h]} \big(f(w) - f(z)\big)\,dw}_{|\cdot| \leqslant \left(\sup_{|w-z|<|h|} |f(w)-f(z)|\right)\cdot|h|} + f(z),$$

como no teorema análogo em discos. □

Aula 19

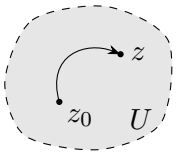
20) O logaritmo complexo

Queremos uma função inversa de e^z. Se $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$, é natural definir

$$\log(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log(r) + i\theta, \qquad (*)$$

onde $\log(r) = \ln(r)$ é o logaritmo real usual.

Problema: $\theta = \arg(z)$ não é único ($e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi n)}$, $n \in \mathbb{Z}$).



Mas, dado $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ e impondo que $\theta = \arg(z)$ deve variar continuamente em função de z, é possível determiná-lo de maneira única numa vizinhança suficientemente pequena U de z_0 (com a "condição inicial" $\arg(z_0) = \theta_0$).

Basta que U seja simplesmente conexo! Uma função $\log\colon U \to \mathbb{C}$ como em $(*)$, definida com a escolha de $\theta = \arg(z)$ acima, é dita um *ramo do logaritmo*.

Observação 19.1 (Explicação topológica). A aplicação $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ é um recobrimento! Existem inversas locais em abertos simplesmente conexos:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \overset{\log}{\nearrow} & \big\downarrow \exp \\ U & \hookrightarrow & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Teorema 19.2. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ simplesmente conexo, com $1 \in \Omega$ e $0 \notin \Omega$. Então existe um (único) ramo do logaritmo $F(z) = \log_\Omega(z)$ em Ω tal que:*

(i) $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa;

(ii) $e^{F(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$;

(iii) $F(r) = \log(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de 1.

Demonstração. Construímos F como uma primitiva de $1/z$:

$$F(z) = \int_\gamma \frac{dw}{w},$$

onde γ é qualquer curva de 1 a z em Ω. A função F está bem definida pois Ω é simplesmente conexo, e $F'(z) = 1/z$. Isto mostra (i).

Para (ii), note que

$$\frac{d}{dz}\big(ze^{-F(z)}\big) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = 0.$$

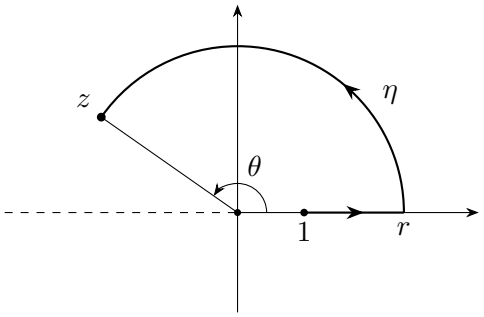
Como Ω é conexo, $ze^{-F(z)}$ é constante. Mas $F(1) = 0$, logo $ze^{-F(z)} = 1$ para todo $z \in \Omega$.

O item (iii) segue de $\displaystyle\int_1^r \frac{dx}{x} = \log(r)$. □

Definição 19.3. O *ramo principal do logaritmo* é a função $\log(z) = \log_\Omega(z)$ em $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Lema 19.4. *Para $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, temos $\log(z) = \log(r)+i\theta$, onde $z = re^{i\theta}$ e θ é o único elemento de $(-\pi,\pi)$ tal que $z = re^{i\theta}$.*

Demonstração. Se $z = re^{i\theta}$ com $|\theta| < \pi$, considere o caminho que vai de 1 a r pelo eixo real e depois de r a z pelo arco de círculo η:



Logo,

$$\log(z) = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_\eta \frac{dz}{z} = \log(r) + \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \log(r) + i\theta. \qquad \square$$

Observação 19.5. Em geral, $\log(z_1z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2)$. Por exemplo, se $z_1 = z_2 = e^{2\pi i/3}$, então $z_1z_2 = e^{4\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$, e

$$\log(z_1z_2) = -\frac{2\pi i}{3} \neq \frac{2\pi i}{3} + \frac{2\pi i}{3} = \log(z_1) + \log(z_2).$$

Exemplo 19.6. Em $D_1(0)$, temos

$$\underbrace{-\log(1-z)}_{\text{“Li}_1(z)\text{”}} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots,$$

pois

$$\big(-\log(1-z)\big)' = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad \text{e} \qquad -\log(1-0) = 0.$$

Definição 19.7. Se $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos

$$z^\alpha = e^{\alpha\log(z)}$$

em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Observação 19.8. Todo ramo do logaritmo dá origem a um ramo de z^α. A função acima é o "ramo principal de z^α".

Exemplo 19.9. $i^i = e^{i\log(i)} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.

Exemplo 19.10.

$$z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log(z)} = e^{\frac{1}{2}(\log(r)+i\theta)} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi).$$

Teorema 19.11. *Se Ω é simplesmente conexo e $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^\times$ é uma função holomorfa que não se anula em nenhum ponto, então existe $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que*

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

(Denotamos $g = \log f$ e dizemos que g é um "ramo do logaritmo de f" em Ω.)

Observação 19.12. Em diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \overset{g}{\nearrow} & \big\downarrow \exp \\ \Omega & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Demonstração. Tome $z_0 \in \Omega$ e defina

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw + c,$$

onde γ é uma curva de z_0 a z em Ω e c é tal que $e^c = f(z_0)$. O resto é análogo à demonstração do teorema anterior. □

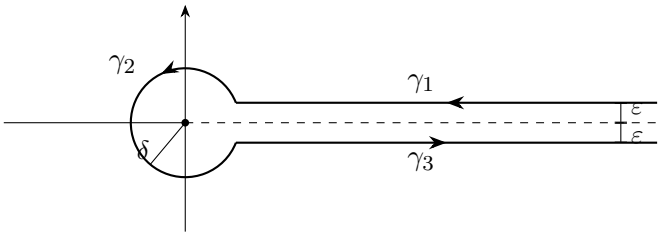
Aula 20

20) O logaritmo complexo (cont.)

Aplicações (sem detalhes). Lembre que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0,$$

onde a integral é sobre a semirreta $[0, \infty)$. Considere o *contorno de Hankel* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (infinito!):



e a integral

$$I(s) = \int_\gamma e^{-z}(-z)^{s-1}\, dz,$$

onde $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$ é o ramo principal ("real quando $z \in (-\infty, 0)$"). Trata-se de uma função inteira! (A integral converge para todo $s \in \mathbb{C}$.) Escrevemos

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) + I_3(s), \qquad \text{onde} \qquad I_j(s) = \int_{\gamma_j} e^{-z}(-z)^{s-1}\, dz.$$

Se $z \in \gamma_1$, então $\arg(-z) \in (-\pi, -\pi/2)$. Se $\varepsilon, \delta \to 0$, então $\arg(-z) \to -\pi$, e portanto

$$\log(-z) = \log|z| + i\arg(-z) \longrightarrow \log|z| - i\pi$$

(no limite, $z = |z| > 0$). Analogamente, se $z \in \gamma_3$, então $\log(-z) \to \log|z| + i\pi$.

Seja $s \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(s) > 0$. Fazendo $\varepsilon, \delta \to 0$ em $I(s)$, que não se altera pelo princípio da deformação de caminhos, obtemos:

$$\begin{aligned}
I_1(s) &\longrightarrow \int_\infty^0 e^{-x} e^{(s-1)(\log(x) - i\pi)}\, dx = -e^{-(s-1)i\pi}\,\Gamma(s) = e^{-si\pi}\,\Gamma(s),\\
I_2(s) &\longrightarrow 0 \qquad (\text{pois } |I_2(s)| \lesssim \delta \cdot \delta^{\mathrm{Re}(s)-1} = \delta^{\mathrm{Re}(s)} \to 0),\\
I_3(s) &\longrightarrow \int_0^\infty e^{-x} e^{(s-1)(\log(x) + i\pi)}\, dx = e^{(s-1)i\pi}\,\Gamma(s) = -e^{si\pi}\,\Gamma(s).
\end{aligned}$$

Logo, lembrando que $\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$,

$$I(s) = (e^{-si\pi} - e^{si\pi})\Gamma(s) = -2i\operatorname{sen}(\pi s)\,\Gamma(s),$$

isto é,

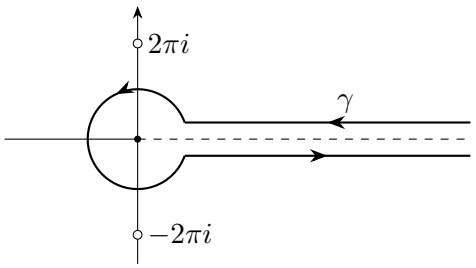
$$\Gamma(s) = -\frac{1}{2i\operatorname{sen}(\pi s)} \int_\gamma e^{-z}(-z)^{s-1}\,dz.$$

A fórmula à direita vale em todo $s \in \mathbb{C}$ fora das singularidades e fornece outra demonstração da continuação analítica de Γ.

Agora considere a função inteira

$$J(s) = \int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz,$$

onde o raio δ do contorno de Hankel é menor que 2π, de modo que os polos $\pm 2\pi i$ ficam de fora:



Se $\operatorname{Re}(s) > 1$,

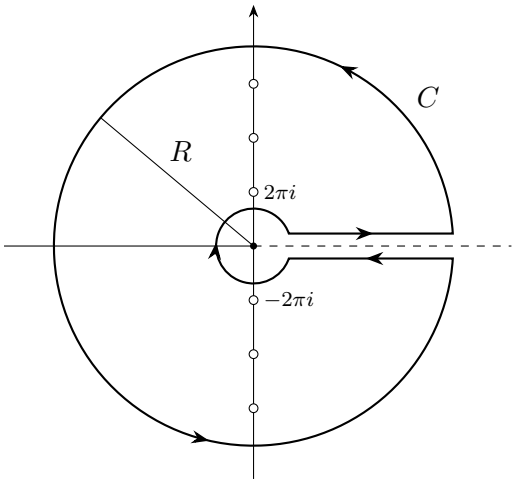
$$\begin{aligned} J(s) &= \int_\gamma (-z)^{s-1}\frac{e^{-z}}{1-e^{-z}}\,dz = \int_\gamma (-z)^{s-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz}\Big)\,dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma e^{-nz}(-z)^{s-1}\,dz \qquad (nz = w) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_{n\gamma} e^{-w}(-w)^{s-1}\,dw \qquad (n\gamma\text{: outro contorno de Hankel}) \\ &= -2i\operatorname{sen}(\pi s)\,\Gamma(s)\,\zeta(s). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\zeta(s) = -\frac{1}{2i\operatorname{sen}(\pi s)\,\Gamma(s)} \int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\,dz,$$

e o lado direito fornece a continuação analítica de ζ.

Seja C uma "fechadura" da forma abaixo, percorrida no sentido positivo: ela é formada pelo círculo $C(0, R)$ e pela parte de γ^- dentro dele.



Pelo teorema dos resíduos,

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz = 2\pi i \sum_{0<|2\pi n|<R} \mathrm{Res}_{z=2\pi i n}\,\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1} = 2\pi i \sum_{0<|n|<\frac{R}{2\pi}} (-2\pi i n)^{s-1}.$$

Se $\mathrm{Re}(s) < 0$, então

$$\int_{C(0,R)} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

(tomando, por exemplo, $R = (2N+1)\pi$, $N \to \infty$, para que $1/(e^z-1)$ fique limitada em $C(0,R)$). Logo, fazendo $R \to \infty$ (e lembrando que C contém γ^-), obtemos

$$\int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}\,dz = -i(2\pi)^s \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \underbrace{\big((-i)^{s-1} + i^{s-1}\big)}_{(**)},$$

onde

$$(**) = \frac{1}{i}\big(i^s - (-i)^s\big) = \frac{2}{2i}\big(e^{i\pi s/2} - e^{-i\pi s/2}\big) = 2\,\mathrm{sen}\Big(\frac{\pi s}{2}\Big).$$

Como o lado esquerdo é $-2i\,\mathrm{sen}(\pi s)\,\Gamma(s)\,\zeta(s)$ e $\sum_{n\geqslant 1} n^{s-1} = \zeta(1-s)$, obtemos

$$\mathrm{sen}(\pi s)\,\Gamma(s)\,\zeta(s) = (2\pi)^s\,\zeta(1-s)\,\mathrm{sen}(\pi s/2),$$

para $\mathrm{Re}(s) < 0$ e, por continuação analítica, para todo s. Equação funcional de $\zeta(s)$!

Se $\xi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2)\,\zeta(s)$, então

$$\xi(1-s) = \cdots = \xi(s).$$

(Use $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e a "fórmula de duplicação de Legendre" $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$.)

Aula 21

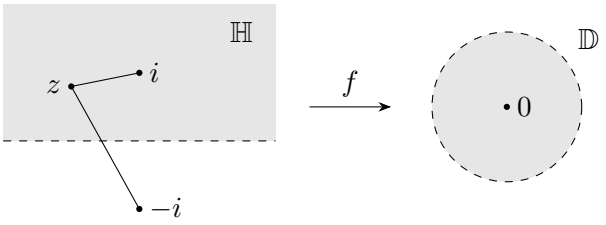
21) Aplicações conformes

Definição 21.1. Dois abertos $U, V \subseteq \mathbb{C}$ são *conformemente equivalentes* se existe uma função holomorfa bijetiva $f\colon U \to V$, dita *aplicação conforme* (de U em V).

Exemplo 21.2. Sejam $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ e $\mathbb{D} = D_1(0)$. Defina a *transformação de Cayley*

$$f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}, \qquad z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Temos $f(z) \in \mathbb{D}$ pois $z \in \mathbb{H} \Rightarrow |z-i| < |z+i|$.



Note que

$$f^{-1}\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}, \qquad w \longmapsto i\,\frac{1+w}{1-w}$$

é holomorfa. De fato,

$$\frac{z-i}{z+i} = w \iff z - i = w(z+i) \iff (1-w)z = i(1+w).$$

Proposição 21.3. *Uma aplicação conforme $f\colon U \to V$ satisfaz $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$. Em particular, f é um* biholomorfismo *(isto é, sua inversa é holomorfa) e f^{-1} também é uma aplicação conforme.*

Demonstração. Por contradição. Se $f'(z_0) = 0$ para algum $z_0 \in U$, então

$$f(z) = f(z_0) + a(z-z_0)^k + G(z)$$

para todo z perto de z_0, onde $a \neq 0$, $k \geqslant 2$ e G tem um zero de ordem $\geqslant k+1$ em z_0. Para w suficientemente pequeno, escreva

$$f(z) - f(z_0) - w = F(z) + G(z),$$

onde $F(z) = a(z-z_0)^k - w$. Como $|G(z)| < |F(z)|$ perto de z_0 (pois $\lim_{z\to z_0} G(z)/F(z) = 0$) e F tem pelo menos dois zeros se w é pequeno, $f(z) - f(z_0) - w$ também tem dois zeros, pelo teorema de Rouché.

(Mais precisamente: $\lim_{z\to z_0} G(z)/a(z-z_0)^k = 0$ implica $|G(z)| < |a(z-z_0)^k|$ em algum círculo $C = C_r(z_0) \subseteq U$. Tome

$$0 < |w| < \min_{z\in C}\big(|a(z-z_0)^k| - |G(z)|\big).$$

Logo,

$$|G(z)| < |a(z-z_0)^k| - |w| \leqslant |F(z)| \quad \text{em } C.$$

Além disso, como $|w| < |a(z-z_0)^k| = |a|r^k$ em C, a equação $F(z) = 0$ tem k soluções em $D_r(z_0)$: se $z \in \mathbb{C}$ satisfaz $a(z-z_0)^k = w$, então

$$|a|\,|z-z_0|^k = |w| < |a|r^k \implies |z-z_0| < r.)$$

Como $f'(z) \neq 0$ para todo $z \neq z_0$ próximo de z_0, segue que as raízes de $f(z) - f(z_0) - w$ são distintas. Mas isto contradiz a injetividade de f! Isto mostra que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.

Seja $g = f^{-1}$. Tome $w_0 = f(z_0) \in V$ e $w = f(z) \in V$ perto de w_0. Se $w \neq w_0$, então

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \xrightarrow{z\to z_0} \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Logo g é holomorfa e $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$. (Note: $w \to w_0 \iff z \to z_0$, pois g é contínua pelo teorema da função inversa.) □

Definição 21.4. Uma aplicação do tipo

$$T\colon \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}, \qquad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}),$$

onde $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é a esfera de Riemann, é dita *transformação de Möbius* (em inglês, "fractional linear transformation").

Observação 21.5.

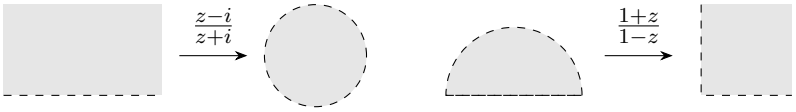
- $T(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} T(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{az+b}{cz+d} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{a+b/z}{c+d/z} = \begin{cases} a/c, & c \neq 0, \\ \infty, & c = 0. \end{cases}$
- Se $c \neq 0$, $T(-d/c) = \infty$.

Exercício 21.6. Mostre que toda transformação de Möbius é um biholomorfismo $\mathbb{S} \to \mathbb{S}$ e que

$$PGL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{S}), \qquad \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \longmapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

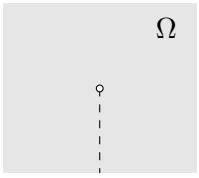
é um isomorfismo de grupos, onde $\mathrm{Aut}(\mathbb{S})$ é o grupo dos biholomorfismos de $\mathbb{S}$ em si mesmo.

Exemplo 21.7. A transformação de Cayley $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ leva o semiplano superior no disco, e $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ leva o semidisco superior no primeiro quadrante:

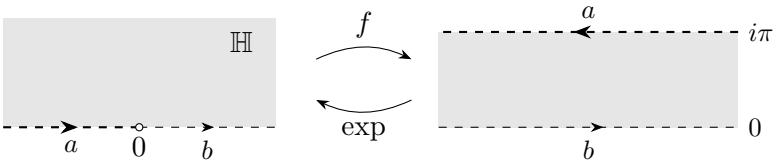


Exemplo 21.8. Sejam $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-i\infty, i0]$ (o plano sem a semirreta imaginária negativa fechada) e

$$f(z) = \log_\Omega(z) = \log(r) + i\theta, \qquad z = re^{i\theta},\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

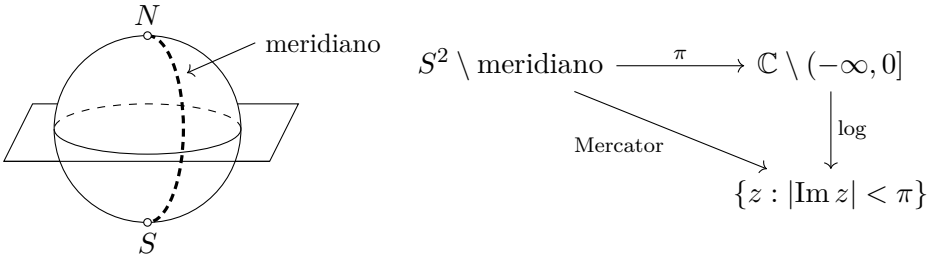


Então f induz uma equivalência conforme entre $\mathbb{H}$ e a faixa $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(w) < \pi\}$, com inversa exp. O semieixo real positivo vai na reta $\mathrm{Im}(w) = 0$ e o semieixo real negativo (percorrido de $-\infty$ a 0) vai na reta $\mathrm{Im}(w) = \pi$ (percorrida de $+\infty$ a $-\infty$):



(Na figura, $a = (-\infty, 0)$ e $b = (0, \infty)$ indicam os pedaços do bordo e suas imagens.)

Observação 21.9. A projeção de Mercator "é" um logaritmo complexo:



Aqui π é a projeção estereográfica, e a projeção de Mercator é a composição (a menos de normalização).

Observação 21.10. Para belas visualizações do logaritmo complexo como transformação conforme, veja o vídeo *How (and why) to take a logarithm of an image*, do canal 3Blue1Brown (2026), disponível em

`https://www.youtube.com/watch?v=ldxFjLJ3rVY`

O vídeo também explica como o logaritmo complexo permite "decodificar" a litografia *Galeria de gravuras* (*Prentententoonstelling*, 1956), de M. C. Escher.

Aula 22

22) O disco

Lema 22.1 (Schwarz)**.** *Seja $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa com $f(0) = 0$. Então:*

(i) $|f(z)| \leqslant |z|$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$ *("contração");*

(ii) se existe $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *com* $|f(z_0)| = |z_0|$*, então* f *é uma rotação* $(z \mapsto e^{i\theta} z)$*;*

(iii) $|f'(0)| \leqslant 1$ *e, se a igualdade ocorre, então* f *é uma rotação.*

Demonstração. Escreva $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ em $\mathbb{D}$ (note que $a_0 = f(0) = 0$). Assim, $f(z)/z$ tem singularidade removível em 0.

Se $|z| = r < 1$, então

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{|f(z)|}{r} < \frac{1}{r}.$$

Pelo princípio do módulo máximo,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \qquad \forall z \in D_r(0).$$

Fazendo $r \to 1^-$, obtemos

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1 \qquad \forall z \in \mathbb{D}. \tag{$*$}$$

Isto mostra (i).

Para (ii), basta notar que, se $|f(z_0)| = |z_0|$, então $|f(z)/z|$ atinge um máximo em z_0 e, portanto, $f(z)/z$ é constante, digamos $f(z) = cz$. Mas $|f(z_0)| = |c|\,|z_0|$ implica $|c| = 1$ (i.e., c é da forma $e^{i\theta}$).

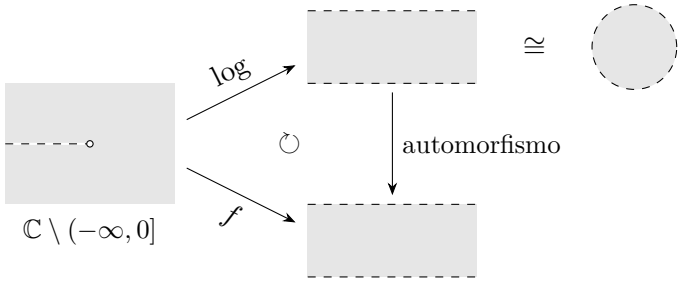
Para (iii), seja $g(z) = f(z)/z$. Note que

$$g(0) = a_1 = f'(0).$$

Logo $|f'(0)| = |g(0)| \leqslant 1$ por $(*)$. Se $|f'(0)| = |g(0)| = 1$, então g atinge seu máximo em 0, logo é constante, e segue como em (ii) que f é uma rotação. □

Definição 22.2. Uma aplicação conforme $f\colon \Omega \to \Omega$ é dita um *automorfismo* de Ω. O conjunto dos automorfismos $\mathrm{Aut}(\Omega)$ é um grupo (com a composição).

Observação 22.3. Uma equivalência conforme não é única: se log e f são duas equivalências conformes de $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sobre a faixa $\{w : |\operatorname{Im} w| < \pi\}$, então elas diferem por um automorfismo da faixa, $f = (f \circ \log^{-1}) \circ \log$. Como a faixa é conformemente equivalente ao disco, isto nos leva a estudar $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.



Exemplo 22.4 (Rotações)**.** $R_\theta \colon z \mapsto e^{i\theta} z$ é um automorfismo de $\mathbb{D}$, com $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Lema 22.5. *Para todo $\alpha \in \mathbb{D}$,*

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$$

("fator de Blaschke").

Demonstração. φ_α é holomorfa (numa vizinhança de $\overline{\mathbb{D}}$), pois $1 - \overline{\alpha} z \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Se $|z| = 1$, então $z = e^{i\theta}$ e

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(e^{i\theta}) &= \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \overline{\alpha} e^{i\theta}} = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \overline{\alpha})} \\ &= -e^{-i\theta} \frac{e^{i\theta} - \alpha}{e^{-i\theta} - \overline{\alpha}} = -e^{-i\theta} \frac{e^{i\theta} - \alpha}{\overline{e^{i\theta} - \alpha}}. \end{aligned}$$

Logo $|\varphi_\alpha(e^{i\theta})| = 1$. Isto é, $\varphi_\alpha(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$. Pelo princípio do módulo máximo, temos

$$|\varphi_\alpha(z)| < 1 \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

isto é, $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} (\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha)(z) &= \frac{\alpha - \varphi_\alpha(z)}{1 - \overline{\alpha}\varphi_\alpha(z)} = \frac{\alpha - \dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}}{1 - \overline{\alpha}\,\dfrac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}} \\ &= \frac{\alpha(1 - \overline{\alpha} z) - (\alpha - z)}{(1 - \overline{\alpha} z) - \overline{\alpha}(\alpha - z)} = \frac{(1 - |\alpha|^2) z}{1 - |\alpha|^2} = z. \end{aligned}$$

Logo φ_α é um automorfismo de $\mathbb{D}$ com $\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha$ (involução). □

Observação 22.6. As φ_α também são chamadas de *automorfismos involutivos* do disco.

Propriedades importantes de φ_α:

- φ_α troca 0 e α:

$$\varphi_\alpha(0) = \alpha \qquad \text{e} \qquad \varphi_\alpha(\alpha) = 0.$$

- Se $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ satisfaz $\varphi(\alpha) = \alpha$, então

$$\psi = \varphi_\alpha \circ \varphi \circ \varphi_\alpha$$

satisfaz $\psi(0) = 0$. ("Normalização" para trocar o ponto fixo de α para 0.)

Teorema 22.7 (Automorfismos do disco)**.** *Se $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, então existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{D}$ tais que*

$$f(z) = e^{i\theta}\,\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} = (R_\theta \circ \varphi_\alpha)(z).$$

(α é único e θ é único módulo 2π.)

Demonstração. Como $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, existe um único $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que $f(\alpha) = 0$. Seja $g = f \circ \varphi_\alpha$. Então $g(0) = 0$ e, pelo lema de Schwarz,

$$|g(z)| \leqslant |z| \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Como $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, então também vale que $g^{-1}(0) = 0$ e

$$|g^{-1}(w)| \leqslant |w| \qquad \forall w \in \mathbb{D}. \tag{$**$}$$

Tomando $w = g(z)$ em $(**)$, obtemos

$$|z| \leqslant |g(z)| \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Daí, concluímos que $|g(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ e, neste caso, o lema de Schwarz implica que $g(z) = e^{i\theta} z$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Logo,

$$f = f \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha = g \circ \varphi_\alpha = R_\theta \circ \varphi_\alpha. \qquad \square$$

Observação 22.8. O *grupo unitário indefinido* é

$$U(m,n) = \{A \in GL_{m+n}(\mathbb{C}) : \langle Av, Aw\rangle_{m,n} = \langle v, w\rangle_{m,n} \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^{m+n}\},$$

onde

$$\langle v, w\rangle_{m,n} = v_1\overline{w}_1 + \cdots + v_m\overline{w}_m - v_{m+1}\overline{w}_{m+1} - \cdots - v_{m+n}\overline{w}_{m+n}.$$

Seja também $SU(m,n) = SL_{m+n}(\mathbb{C}) \cap U(m,n)$. Explicitamente,

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

O mapa

$$\begin{array}{ccc} GL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{S}) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ SU(1,1) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \longmapsto \left(z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \right) = R_\theta \circ \varphi_{-\beta/\alpha}, \quad e^{i\theta} = -\frac{\alpha}{\overline{\alpha}},$$

é um morfismo de grupos e induz um isomorfismo

$$PSU(1,1) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{D}).$$

Aula 23

22) O disco (cont.)

Observação 23.1. O grupo

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 1 \right\}$$

age em $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ via

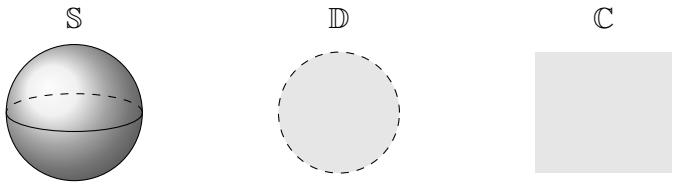
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

(Verifique que $\operatorname{Im}\big((az+b)/(cz+d)\big) > 0$.) Isto induz um isomorfismo (prove!)

$$PSL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}(\mathbb{H}).$$

(Em particular, $PSU(1,1) \cong PSL_2(\mathbb{R})$.)

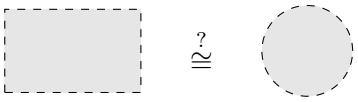
Exercício 23.2. Calcule $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$.



23) O teorema da aplicação de Riemann: enunciado

Quais abertos $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ são conformemente equivalentes a $\mathbb{D}$?

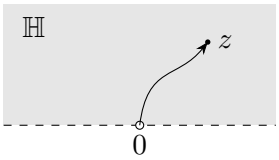
Exemplo 23.3 (Não trivial)**.** Será que um retângulo (aberto) é conformemente equivalente ao disco?



Seja $k \in (0,1)$ e

$$f(z) = \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

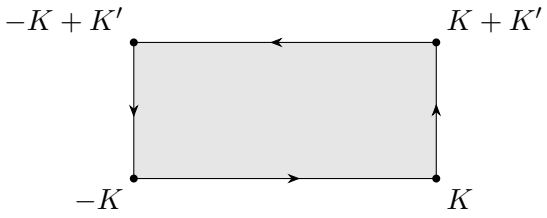
definida em $\mathbb{H}$, onde a integral é sobre um caminho em $\mathbb{H}$ de 0 a z (exceto pelo ponto inicial) e usamos o ramo de $\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}$ que toma valores em $(0,\infty)$ se $w \in (-1,1)$.



Teorema 23.4. *f é uma aplicação conforme de $\mathbb{H}$ no interior do retângulo de vértices $-K$, K, $K+K'$, $-K+K'$, onde*

$$K = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \qquad K' = \int_1^{1/k} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

(K' é puramente imaginário).



Integrais elípticas!

Condições necessárias. Condições necessárias em Ω (aberto de $\mathbb{C}$) para a existência de uma aplicação conforme $F\colon \Omega \to \mathbb{D}$:

(i) $\Omega \neq \mathbb{C}$: se $\Omega = \mathbb{C}$, então F é constante pelo teorema de Liouville;

(ii) Ω é simplesmente conexo: pois F é um homeomorfismo.

Surpreendentemente...

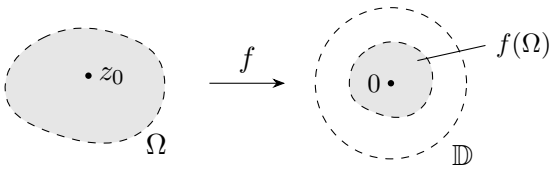
Teorema 23.5 (da aplicação de Riemann)**.** *Se $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ é um aberto simplesmente conexo e $z_0 \in \Omega$, então existe uma única aplicação conforme $F\colon \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$.*

Corolário 23.6. *Quaisquer dois abertos simplesmente conexos $\neq \mathbb{C}$ são conformemente equivalentes.*

Observação 23.7. A "demonstração" original de Riemann usa o "princípio de Dirichlet" (construção de função harmônica via minimização de um "funcional de energia"; princípio variacional). A demonstração padrão atual (que remonta a Koebe, Carathéodory, Fejér e F. Riesz) usa *famílias normais* e o teorema de Montel. Voltaremos ao ponto de vista de Riemann na Observação 27.4.

Ideia.

- Considere a família $\mathcal{F}$ de todas as funções holomorfas injetivas $f\colon \Omega \to \mathbb{D}$ com $f(z_0) = 0$. (É preciso mostrar que ela não é vazia!)



- Mostre que existe $F \in \mathcal{F}$ que maximiza $|F'(z_0)|$.
- Mostre que $F(\Omega) = \mathbb{D}$.
- Multiplique por um $e^{i\theta}$ apropriado.

Unicidade. Se $F, \widetilde{F}\colon \Omega \to \mathbb{D}$ são aplicações conformes com $F(z_0) = \widetilde{F}(z_0) = 0$ e $F'(z_0), \widetilde{F}'(z_0) > 0$, então $H = F \circ \widetilde{F}^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ com $H(0) = 0$, logo $H(z) = e^{i\theta} z$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$ (pelo teorema dos automorfismos do disco). Mas

$$e^{i\theta} = H'(0) = F'\big(\widetilde{F}^{-1}(0)\big)\,(\widetilde{F}^{-1})'(0) = \frac{F'(z_0)}{\widetilde{F}'(z_0)} > 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{i\theta} = 1,$$

isto é, $F = \widetilde{F}$.

Aula 24

24) O teorema de Montel

Denotamos por $\mathcal{O}(\Omega)$ o conjunto das funções holomorfas em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aberto.

Definição 24.1. Uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ é dita uma *família normal* se toda sequência em $\mathcal{F}$ tem uma subsequência que converge uniformemente em compactos de Ω.

O limite não precisa estar em $\mathcal{F}$! (Uma família normal é "pré-compacta": tem fecho compacto.)

Definição 24.2.

- $\mathcal{F}$ é *uniformemente limitada em compactos* se, para todo compacto $K \subseteq \Omega$, existe $M \geqslant 0$ tal que $\|f\|_K \leqslant M$ para toda $f \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ é *(uniformemente) equicontínua* em um compacto $K \subseteq \Omega$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z, w \in K,\ |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Exemplo 24.3. A família $\mathcal{F} = \{f_n(z) = z^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{C})$ não é uniformemente limitada em compactos de $\mathbb{C}$ (mas é uniformemente limitada em compactos de $\mathbb{D}$).

$\mathcal{F}$ não é equicontínua em $K = [0, 1]$: se $x_0 \in (0, 1)$, então

$$|f_n(1) - f_n(x_0)| = |1 - x_0^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Teorema 24.4 (Montel)**.** *Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ é uniformemente limitada em compactos, então*

(i) $\mathcal{F}$ é equicontínua em todo compacto de Ω;

(ii) $\mathcal{F}$ é uma família normal.

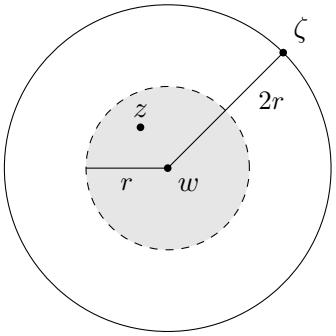
Demonstração do teorema de Montel. Seja $K \subseteq \Omega$ compacto e tome $r > 0$ tal que $D_{3r}(z) \subseteq \Omega$ para todo $z \in K$. Sejam $z, w \in K$ com $|z - w| < r$. Pela fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(w)} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta.$$

Note que, para $\zeta \in \partial D_{2r}(w)$,

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \frac{|z - w|}{|\zeta - z|\,|\zeta - w|} = \frac{|z - w|}{|\zeta - z|\,2r} < \frac{|z - w|}{2r^2},$$

pois $|\zeta - z| \geqslant |\zeta - w| - |w - z| > 2r - r = r$.



Logo,

$$|f(z) - f(w)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi r \cdot M \cdot \frac{|z-w|}{2r^2} = \underbrace{\frac{M}{r}}_{C} |z-w|,$$

onde M é uma cota uniforme para $\mathcal{F}$ no compacto $\{\zeta \in \Omega : d(\zeta, K) \leqslant 2r\}$. Logo,

$$|f(z) - f(w)| \leqslant C|z-w| \qquad \forall z, w \in K \text{ com } |z-w| < r \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Isto implica que $\mathcal{F}$ é equicontínua em K.

Para mostrar que $\mathcal{F}$ é uma família normal, seja $(f_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{F}$ e escolha uma sequência $(w_j)_j$ densa em Ω.

Como $(f_n)_n$ é uniformemente limitada em compactos, $(f_n(w_1))_n$ é limitada e, portanto, existe uma subsequência $(f_{n,1})_n$ de $(f_n)_n$ tal que $(f_{n,1}(w_1))_n$ converge. De $(f_{n,1})_n$, podemos extrair uma subsequência $(f_{n,2})_n$ tal que $(f_{n,2}(w_2))_n$ converge. Indutivamente, extraímos uma subsequência $(f_{n,j})_n$ de $(f_{n,j-1})_n$ tal que $(f_{n,j}(w_j))_n$ converge.

Tome $g_n = f_{n,n}$ ("subsequência diagonal"). Note que $(g_n(w_j))_n$ converge para todo j: de fato, $\{g_n\}_{n \geqslant j} \subseteq \{f_{n,j}\}_n$.

$$\begin{array}{lccccc}
(f_{n,1})_n\colon & f_{1,1} & f_{2,1} & f_{3,1} & f_{4,1} & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & & & & \\
(f_{n,2})_n\colon & f_{1,2} & f_{2,2} & f_{3,2} & f_{4,2} & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & & & & \\
(f_{n,3})_n\colon & f_{1,3} & f_{2,3} & f_{3,3} & f_{4,3} & \cdots \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & & & & \\
(f_{n,4})_n\colon & f_{1,4} & f_{2,4} & f_{3,4} & f_{4,4} & \cdots \\
\vdots & & & & & \ddots \\
\hline
(g_n)_n\colon & f_{1,1} & f_{2,2} & f_{3,3} & f_{4,4} & \cdots
\end{array}$$

Seja $K \subseteq \Omega$ um compacto. Fixe $\rho > 0$ tal que $K' = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leqslant \rho\} \subseteq \Omega$; K' é compacto. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta \in (0, \rho]$ tal que

$$z, w \in K',\ |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Para algum $j_0 \in \mathbb{N}$, temos $K \subseteq D_\delta(w_1) \cup \cdots \cup D_\delta(w_{j_0})$, e podemos descartar os discos que não intersectam K, de modo que os w_j restantes estão em K'. (De fato, pela densidade, todo $z \in K$ está em algum $D_\delta(w_j)$; por compacidade, finitos desses discos cobrem K.)

Tome $n_0 \gg 0$ tal que, se $m, n \geqslant n_0$, então

$$|g_m(w_j) - g_n(w_j)| < \varepsilon \qquad \forall j = 1, \ldots, j_0.$$

Logo, se $z \in K$, então $z \in D_\delta(w_j)$ para algum $j \in \{1, \ldots, j_0\}$ (com $w_j \in K'$) e vale

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g_m(z)| &\leqslant |g_n(z) - g_n(w_j)| + |g_n(w_j) - g_m(w_j)| + |g_m(w_j) - g_m(z)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

para todos $m, n \geqslant n_0$. Isto mostra que $(g_n)_n$ é uniformemente de Cauchy, logo converge uniformemente, em K. □

Observação. No livro de Stein e Shakarchi, a demonstração usa uma *exaustão* de Ω: uma sequência de compactos $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq \Omega$ com $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ e tal que todo compacto $K \subseteq \Omega$ está contido em algum K_n. Todo aberto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tem uma exaustão, por exemplo $K_n = \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) \geqslant 1/n\} \cap \overline{D}_n(0)$. Lá, a subsequência diagonal é extraída de modo a convergir uniformemente em cada K_n. Aqui não precisamos disso: a subsequência diagonal é escolhida a partir de um conjunto denso, independentemente do compacto, e a equicontinuidade garante a convergência uniforme em qualquer compacto K.

25) Demonstração do teorema da aplicação de Riemann

Proposição 24.5. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é conexo e $(f_n)_n$ é uma sequência de funções holomorfas $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ injetivas que converge uniformemente em compactos de Ω para $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$, então f é injetiva ou constante.*

Demonstração. Se f não é injetiva, tome $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ tais que $f(z_1) = f(z_2)$. Defina uma nova sequência

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1).$$

Como f_n é injetiva, o único zero de g_n é z_1. Note que $(g_n)_n$ converge uniformemente em compactos para $g = f - f(z_1)$, que se anula em z_2.

Se $g \not\equiv 0$, então z_2 é um zero isolado de g (Ω é conexo!). Logo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g'(w)}{g(w)}\,dw = k \geqslant 1 \qquad (k = \text{ordem do zero}),$$

se D é um pequeno disco centrado em z_2 (com $\overline{D} \subseteq \Omega$, $z_1 \notin \overline{D}$ e $g \neq 0$ em $\overline{D} \setminus \{z_2\}$). Logo $1/g_n \to 1/g$ uniformemente em ∂D e, como $g_n' \to g'$ uniformemente em ∂D, concluímos que

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g_n'(w)}{g_n(w)}\,dw \longrightarrow k.$$

Absurdo! Portanto $g \equiv 0$, isto é, f é constante. □

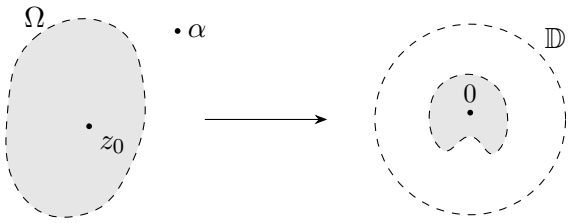
Aula 25

25) Demonstração do teorema da aplicação de Riemann (cont.)

Lembremos o enunciado que queremos demonstrar.

Teorema (da aplicação de Riemann)**.** *Se $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ é um aberto simplesmente conexo (não vazio), então Ω é conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.*

Demonstração. Passo 1. Afirmação: Ω é conformemente equivalente a um aberto contido em $\mathbb{D}$ que contém a origem.



Tome $\alpha \notin \Omega$ (existe, pois $\Omega \neq \mathbb{C}$). Logo $z - \alpha$ não se anula em Ω. Como Ω é simplesmente conexo, existe um ramo

$$f(z) = \log(z - \alpha) \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Note que f é injetora, pois tem inversa ($f^{-1}(w) = e^w + \alpha$).

Tome $z_0 \in \Omega$ e observe que

$$f(z) \neq f(z_0) + 2\pi i \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\},$$

pois, se $z \neq z_0$,

$$z_0 = e^{f(z_0)} = e^{f(z_0)+2\pi i} \neq z = e^{f(z)}.$$

Podemos dizer mais: existe um disco D centrado em $f(z_0) + 2\pi i$ tal que

$$D \cap f(\Omega) = \emptyset.$$

Caso contrário, existiria uma sequência $(z_n)_n$ em Ω tal que $f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(z_0) + 2\pi i$ (considere discos de raio $1/n$). Logo,

$$z_n = e^{f(z_n)} \longrightarrow e^{f(z_0)+2\pi i} = z_0,$$

o que implicaria (por continuidade de f) que $f(z_n) \to f(z_0)$. Absurdo (pois $f(z_0) \neq f(z_0) + 2\pi i$).

Finalmente, considere

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - \big(f(z_0) + 2\pi i\big)}, \qquad \forall z \in \Omega.$$

Note que F é holomorfa e injetora e, portanto, define uma aplicação conforme $F\colon \Omega \to F(\Omega)$, onde $F(\Omega)$ é aberto. Além disso, $F(\Omega)$ é *limitado*, pois

$$D \cap f(\Omega) = \emptyset \implies \big|f(z) - (f(z_0) + 2\pi i)\big| \geqslant r \quad \forall z \in \Omega,$$

onde r é o raio de D; logo $F(\Omega) \subseteq D_{1/r}(0)$.

Agora basta escolher $a, b \in \mathbb{C}$ convenientes tais que $a + bF(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ e $0 \in a + bF(\Omega)$. Então $\widetilde{F} = a + bF$ é a aplicação conforme procurada.

Passo 2. Pelo Passo 1, podemos supor que $\Omega \subseteq \mathbb{D}$, com $0 \in \Omega$.

Seja $\mathcal{F}$ a família das funções holomorfas injetoras $f\colon \Omega \to \mathbb{D}$ tais que $f(0) = 0$. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $z \in \mathcal{F}$ (a identidade). A família $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada, pois $|f(z)| \leqslant 1$ para todos $f \in \mathcal{F}$ e $z \in \Omega$.

Queremos encontrar $f \in \mathcal{F}$ que maximiza $|f'(0)|$. Pela desigualdade de Cauchy, para toda $f \in \mathcal{F}$,

$$|f'(0)| \leqslant \frac{1}{R} \sup_{z \in C_R(0)} |f(z)| \leqslant \frac{1}{R},$$

onde $R > 0$ é tal que $\overline{D}_R(0) \subseteq \Omega$.

Seja $s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$ e $(f_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{F}$ tal que $|f_n'(0)| \xrightarrow{n \to \infty} s$. Pelo teorema de Montel, $(f_n)_n$ admite uma subsequência que converge uniformemente em compactos de Ω. Seja f o limite.

Como $s \geqslant 1$ (pois $z \in \mathcal{F}$) e $|f'(0)| = s$, f não é constante. Pela proposição vista na aula passada (um limite uniforme em compactos de funções holomorfas injetoras é injetor ou constante), f é injetora.

Por continuidade, $|f(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in \Omega$. Pelo princípio do módulo máximo, $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$. Como $f(0) = 0$, concluímos que $f \in \mathcal{F}$.

Passo 3. Resta mostrar que $f(\Omega) = \mathbb{D}$.

Suponha que existe $\alpha \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$ e considere o automorfismo

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

de $\mathbb{D}$. Como Ω é simplesmente conexo, $U = (\psi_\alpha \circ f)(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ também é. Note que $0 \notin U$. Logo, podemos definir um ramo da raiz quadrada em U:

$$g(w) = \sqrt{w} = e^{\frac{1}{2}\log(w)}.$$

Afirmação: $F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f \in \mathcal{F}$. Com efeito:

- $F \in \mathcal{O}(\Omega)$;
- $F(0) = \psi_{g(\alpha)}\big(g(\psi_\alpha(f(0)))\big) = \psi_{g(\alpha)}\big(g(\psi_\alpha(0))\big) = \psi_{g(\alpha)}\big(g(\alpha)\big) = 0$;
- $F(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$ (pois $|w| < 1 \Rightarrow |g(w)| < 1$);
- F é injetora (g é injetora, pois $g^2(w) = w$).

Se $h(w) = w^2$, então

$$f = \underbrace{\psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}}_{\Phi} \circ F = \Phi \circ F.$$

Note que $\Phi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ e $\Phi(0) = 0$, mas Φ não é injetora (pois h não é). Como Φ não é uma rotação, segue do lema de Schwarz que $|\Phi'(0)| < 1$. Mas

$$|f'(0)| = |\Phi'(0)\, F'(0)| < |F'(0)|,$$

o que contradiz a maximalidade de $|f'(0)|$. □

Aula 26

26) Funções harmônicas

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ um aberto.

Definição 26.1. Uma função $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^2 é *harmônica* se $\Delta f \equiv 0$, onde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

é o *laplaciano*.

Note que Δ é um operador real em $C^2(\Omega;\mathbb{C})$. Em particular, Δ preserva $C^2(\Omega;\mathbb{R})$ e

$$f = u + iv\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ é harmônica } \iff u, v\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ são harmônicas.}$$

Lema 26.2. $\Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}} = 4\dfrac{\partial^2}{\partial \bar{z}\,\partial z}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} - i\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$ □

Corolário 26.3. *Toda função holomorfa é harmônica. As partes real e imaginária de uma função holomorfa são harmônicas.*

Demonstração. Já vimos que uma função holomorfa f é de classe C^∞ e satisfaz $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (equações de Cauchy–Riemann). Logo,

$$\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Big) = 0.$$ □

Exemplo 26.4. A função $\log|z| = \log\sqrt{x^2+y^2}$ é harmônica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (pois é, localmente, a parte real de um ramo do logaritmo).

Teorema 26.5. *Se Ω é* simplesmente conexo*, toda função harmônica real $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é parte real de uma função holomorfa $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ($u = \mathrm{Re}(f)$).*

Demonstração. Como u é harmônica, temos

$$0 = \Delta u = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

Logo, $\frac{\partial u}{\partial z}$ é holomorfa, pelas equações de Cauchy–Riemann. Como Ω é simplesmente conexo, $2\frac{\partial u}{\partial z}$ admite uma primitiva F (por exemplo, $F(z) = \int_{z_0}^{z} 2\frac{\partial u}{\partial z}(w)\,dw$). Isto é, F é holomorfa e satisfaz

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2\frac{\partial u}{\partial z} \iff dF = 2\frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Como u é real,

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \bar{z}} = 2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \iff d\overline{F} = 2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}.$$

Logo,

$$d\big(\operatorname{Re}(F)\big) = d\Big(\frac{F+\overline{F}}{2}\Big) = \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} = du.$$

Isto implica que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \operatorname{Re}(F) + C.$$

Tome $f = F + C$. □

Corolário 26.6. *Toda função harmônica é de classe C^∞ (na verdade, analítica).*

Demonstração. Localmente (em discos), ela é parte real (e imaginária) de funções holomorfas. □

Corolário 26.7 (Teorema do valor médio)**.** *Se $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é harmônica e $\overline{D}_r(z_0) \subseteq \Omega$, então*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Demonstração. Seja $R > r$ tal que $D_R(z_0) \subseteq \Omega$. Se $f \in \mathcal{O}(D_R(z_0))$ é tal que $u = \operatorname{Re}(f)$, então, pela fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta. \end{aligned}$$

Agora basta tomar a parte real de ambos os lados da equação. □

Corolário 26.8 (Princípio do máximo)**.** *Se Ω é conexo e $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função harmônica que atinge um máximo em Ω, então u é constante.*

Isto segue do corolário anterior, mas também é possível demonstrá-lo usando funções holomorfas.

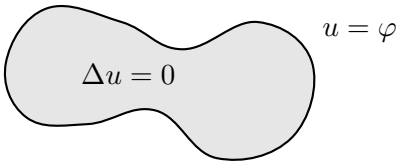
Demonstração. Seja $z_0 \in \Omega$ tal que $u(z) \leqslant u(z_0)$ para todo $z \in \Omega$, e seja

$$S = \{z \in \Omega : u(z) = u(z_0)\} \neq \emptyset.$$

S é fechado em Ω. Seja $w \in S$ e $U \subseteq \Omega$ uma vizinhança convexa de w tal que $u = \mathrm{Re}(f)$, com $f \in \mathcal{O}(U)$. Então $|e^f| = e^u$ atinge um máximo em w. Pelo princípio do módulo máximo para funções holomorfas, e^f (e, portanto, u) é constante em U. Isto mostra que S é aberto. Como Ω é conexo, $S = \Omega$. □

27) O problema de Dirichlet e o núcleo de Poisson

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto conexo e $\varphi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ contínua (ou, mais geralmente, apenas contínua q.t.p.). É possível estender φ a uma função contínua $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $u|_\Omega$ é harmônica?



Proposição 26.9. *Se Ω é limitado, a solução do problema de Dirichlet é única, se existir.*

Demonstração. Se u_1 e u_2 são duas soluções do problema de Dirichlet, então $u \coloneqq u_1 - u_2$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$ tal que $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ e $u|_\Omega$ é harmônica.

Como $\overline{\Omega}$ é compacto, u atinge um máximo em algum ponto $z_0 \in \overline{\Omega}$. Se $u(z_0) > 0$, então $z_0 \in \Omega$. Pelo princípio do máximo, u é constante, o que contradiz $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Isto mostra que $u \leqslant 0$ em Ω.

Repetindo o mesmo argumento para $-u$, mostramos que $u \geqslant 0$ em Ω. Logo, $u \equiv 0$. □

Definição 26.10. O *núcleo de Poisson* é a função

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right), \qquad re^{it} \in \mathbb{D}, \\ &= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{it}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}. \end{aligned}$$

Ela é par, positiva, 2π-periódica e decrescente em $t \in [0, \pi]$; além disso, para $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\lim_{r\to 1} P_r(t) = 0$.

Série de Fourier:

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \operatorname{Re}\Big((1+re^{it})\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{int}\Big) = \operatorname{Re}\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int}\Big) \\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nt) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\big(e^{int}+e^{-int}\big) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}. \end{aligned}$$

Teorema 26.11. *Seja $\varphi\colon \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$u_\varphi(z) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\,\varphi(e^{it})\,dt, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

é a solução do problema de Dirichlet em $\mathbb{D}$ (estendendo u_φ por φ em $\partial\mathbb{D}$).

Esboço da demonstração. • u_φ é harmônica em $\mathbb{D}$, pois

$$\begin{aligned} u_\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\Big(\frac{1+re^{i(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}}\Big)\varphi(e^{it})\,dt \\ &= \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\,\varphi(e^{it})\,dt\Big) \\ &= \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{w+z}{w-z}\,\varphi(w)\,\frac{dw}{w}\Big), \end{aligned}$$

e a integral acima é uma função holomorfa de z.

- Fato: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(t)\,dt = 1$ (pela série de Fourier).

  Se $z \to z_0 = e^{i\theta_0} \in \partial\mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} u_\varphi(z) - \varphi(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\big(\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{i\theta_0})\big)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{|t-\theta_0|<\delta} + \int_{|t-\theta_0|\geqslant\delta}\Big), \end{aligned}$$

  onde integramos sobre um intervalo de comprimento 2π centrado em θ_0.

  (i) $|t-\theta_0| < \delta \implies |\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{i\theta_0})| < \varepsilon \implies \Big|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|t-\theta_0|<\delta} \cdots\Big| \leqslant \varepsilon$;

  (ii) $|t-\theta_0| \geqslant \delta \implies |t-\theta| \geqslant \frac{\delta}{2}$ (se $|\theta-\theta_0| \leqslant \frac{\delta}{2}$) $\implies 0 \leqslant P_r(\theta-t) \leqslant \varepsilon$ se r é suficientemente próximo de 1.

  ... □

Aula 27

27) O problema de Dirichlet e o núcleo de Poisson (cont.)

Lema 27.1. *Se $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é harmônica e $F\colon U \to \Omega$ é holomorfa, então $u \circ F\colon U \to \mathbb{R}$ é harmônica.*

Demonstração. A questão é local. Dado $z_0 \in U$, tome um disco $D \subseteq \Omega$ centrado em $F(z_0)$ e $f \in \mathcal{O}(D)$ com $u = \mathrm{Re}(f)$ em D. Numa vizinhança de z_0 temos $u \circ F = \mathrm{Re}(f \circ F)$, que é harmônica, pois $f \circ F$ é holomorfa. □

Observação 27.2 (Problema de Dirichlet em outros domínios). Pelo lema e pelo teorema da aplicação de Riemann, podemos resolver o problema de Dirichlet em qualquer aberto simplesmente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, *desde que* a aplicação conforme $F\colon \Omega \to \mathbb{D}$ "se comporte bem" nas fronteiras: se F se estende a um homeomorfismo $\overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$ e $\varphi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é contínua, então $u = u_{\varphi \circ F^{-1}} \circ F$ é harmônica em Ω e se estende continuamente por φ em $\partial\Omega$.

Exemplo 27.3 (O semiplano superior)**.** Seja $\Omega = \mathbb{H}$, com $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$. A transformação de Cayley

$$F\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \qquad z \longmapsto \frac{z-i}{z+i},$$

se estende a um homeomorfismo $F\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ (o ponto $1 \in \partial\mathbb{D}$ corresponde a "$z = \infty$"). Dada $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e limitada, a função $\varphi \circ F^{-1}$ é limitada em $\partial\mathbb{D}$ e contínua fora do ponto 1. A demonstração do teorema anterior se adapta a esse caso: a integral de Poisson $u_{\varphi \circ F^{-1}}$ é harmônica em $\mathbb{D}$ e tende a $\varphi(F^{-1}(w_0))$ quando $z \to w_0 \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$. Pelo lema, $u = u_{\varphi \circ F^{-1}} \circ F$ é harmônica em $\mathbb{H}$ e

$$\lim_{z \to x_0} u(z) = \varphi(x_0) \qquad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Fórmula explícita. Escrevendo $\zeta = F(z)$ e fazendo a mudança de variáveis $w = e^{it} = F(s)$, $s \in \mathbb{R}$, na integral de Poisson, obtemos

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2}\, \varphi(s)\, ds, \qquad y > 0.$$

A função $P_y(x) = \dfrac{1}{\pi}\, \dfrac{y}{x^2+y^2}$ é o *núcleo de Poisson do semiplano*. Note que

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\, \mathrm{Im}\Big(-\frac{1}{x+iy}\Big) \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x)\, dx = 1 \quad (y > 0),$$

e que P_y se concentra em $x = 0$ quando $y \to 0^+$, assim como P_r se concentra em $t = 0$ quando $r \to 1^-$.

- *Exemplo:* se $\varphi = \mathbf{1}_{(0,\infty)}$ (contínua fora de 0), então

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\,ds}{(x-s)^2+y^2} = 1 - \frac{\arg(z)}{\pi}, \qquad 0 < \arg(z) < \pi,$$

que é de fato harmônica ($\arg(z) = \operatorname{Im}\log(z)$) e vale 1 em $(0,\infty)$ e 0 em $(-\infty, 0)$.

- *Unicidade:* em $\mathbb{H}$ (que não é limitado), a solução não é única sem hipóteses adicionais: $u(x+iy) = y$ é harmônica, contínua em $\overline{\mathbb{H}}$ e se anula em $\mathbb{R}$. Pode-se mostrar que a solução é única entre as funções *limitadas*.

Observação 27.4 (O princípio de Dirichlet e a demonstração original de Riemann). O problema de Dirichlet está na origem do teorema da aplicação de Riemann. Seja $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ um aberto limitado e simplesmente conexo, com bordo "bom", e seja $z_0 \in \Omega$. Suponha que possamos resolver o problema de Dirichlet em Ω com dado de bordo $\log|z - z_0|$: existe h contínua em $\overline{\Omega}$, harmônica em Ω, com $h(z) = \log|z - z_0|$ para $z \in \partial\Omega$. A *função de Green* de Ω com polo em z_0 é

$$g(z) = \log|z - z_0| - h(z),$$

que é harmônica em $\Omega \setminus \{z_0\}$, se anula em $\partial\Omega$ e tende a $-\infty$ em z_0. Como Ω é simplesmente conexo, $h = \operatorname{Re}(H)$ com $H \in \mathcal{O}(\Omega)$, e então

$$F(z) = (z - z_0)\, e^{-H(z)}$$

é holomorfa em Ω, tem um único zero (simples) em z_0 e satisfaz $|F| = e^g$; em particular, $|F| < 1$ em Ω e $|F(z)| \to 1$ quando $z \to \partial\Omega$. Com o princípio do argumento, mostra-se que $F\colon \Omega \to \mathbb{D}$ é bijetora.

Para obter h, Riemann usou o *princípio de Dirichlet* (nome dado por ele): a solução do problema de Dirichlet é a função que minimiza a "energia"

$$E(u) = \iint_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dy$$

entre as funções com os valores de bordo prescritos. Weierstrass observou que um tal mínimo nem sempre existe, e a demonstração de Riemann só foi tornada rigorosa mais tarde: por Osgood (1900), que construiu a função de Green em domínios simplesmente conexos arbitrários, e por Hilbert, que justificou o princípio de Dirichlet (1900–1904). As demonstrações via famílias normais (Koebe, Carathéodory, Fejér e F. Riesz), como a que vimos na Aula 25, evitam esse problema. Para o ponto de vista do problema de Dirichlet, veja:

- R. Courant, *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces*, Interscience, Nova York, 1950;

- J. Bruna e J. Cufí, *Complex Analysis*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, Zurique, 2013, Capítulo 9 ("The Riemann mapping theorem and Dirichlet's problem"), onde o problema de Dirichlet é resolvido pelo método de Perron e o teorema da aplicação de Riemann é deduzido dele.

28) O teorema dos números primos (enunciado)

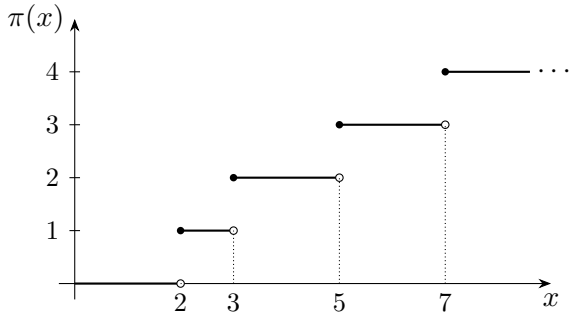
Dado $x > 0$, seja

$$\pi(x) = \text{número de primos} \leqslant x = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Exemplo 27.5. $\pi(10) = 4$:

$$1,\ \textcircled{2},\ \textcircled{3},\ 4,\ \textcircled{5},\ 6,\ \textcircled{7},\ 8,\ 9,\ 10.$$

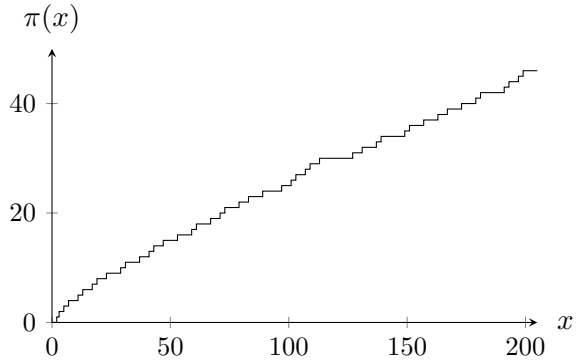
A função $\pi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função escada:



A infinitude dos primos é equivalente a

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty.$$

Gráfico para $0 \leqslant x \leqslant N$ grande (aqui $N = 200$):



Teorema 27.6 (Hadamard, de la Vallée Poussin)**.**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}, \qquad x \to \infty$$

(isto é, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$*).*

Exemplo 27.7. $\dfrac{1000}{\log(1000)} = 144{,}76\ldots$, enquanto $\pi(1000) = 168$.

Definição 27.8. A *integral logarítmica* é a função

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log(t)} = \mathrm{Li}(x) + \underbrace{\mathrm{li}(2)}_{\text{cte}},$$

onde $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x dt/\log(t)$.

Note que $\mathrm{li}(x) \sim \dfrac{x}{\log(x)}$. De fato, $\mathrm{li}(x) \to \infty$ (pois, para $1 < t < x$, $\frac{1}{\log t} \geqslant \frac{1}{\log x}$, logo $\mathrm{Li}(x) \geqslant \frac{x-2}{\log x}$) e, pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{li}(x)}{x/\log(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\log(x)}{(\log(x)-1)/\log(x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1.$$

Portanto, o TNP (teorema dos números primos) é equivalente a

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x).$$

Exemplo 27.9. $\pi(1000) = 168$, $\mathrm{li}(1000) = 177{,}609\ldots$

Observação 27.10. A hipótese de Riemann implica que

$$\pi(x) - \mathrm{li}(x) = O\big(x^{\frac{1}{2}} \log(x)\big),$$

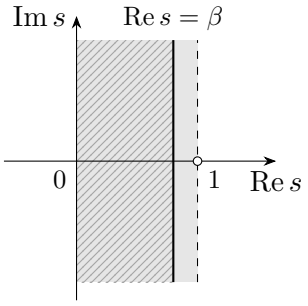
onde o expoente $\frac{1}{2}$ é a parte real dos zeros não triviais de $\zeta(s)$. Isto é muito mais preciso que o TNP!

Mais geralmente, se

$$\beta = \sup\{\mathrm{Re}(\rho) : \zeta(\rho) = 0,\ \rho \text{ zero não trivial}\},$$

então

$$\pi(x) - \mathrm{li}(x) = O\big(x^{\beta} \log(x)\big).$$



Se $\beta < 1$, então o TNP segue. Mas não se sabe mostrar que $\beta < 1$![3] Mas veremos (ao menos a ideia) que o TNP segue da propriedade mais fraca seguinte: se $\mathrm{Re}(s) = 1$, então $\zeta(s) \neq 0$.

Definição 27.11. A *função de von Mangoldt* é

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } n \text{ é uma potência de um primo } p, \\ 0, & \text{se não.} \end{cases}$$

A *função de Tchebychev* é

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \leqslant x} \log(p)$$

(soma sobre os pares (p, m) com p primo e $m \geqslant 1$).

Proposição 27.12. *Se $\psi(x) \sim x$, então $\pi(x) \sim x/\log(x)$.*

Demonstração. Queremos mostrar:

$$\text{(i)} \ \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \geqslant 1 \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)} \ \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} \leqslant 1.$$

Note:

$$\begin{aligned} \psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log(p) &= \sum_{p \leqslant x} \Big\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \Big\rfloor \log(p) \\ &\leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{\log(x)}{\log(p)} \log(p) = \pi(x) \log(x) \\ \\ \implies \frac{\psi(x)}{x} &\leqslant \frac{\pi(x)}{x/\log(x)}. \end{aligned}$$

Se $\psi(x) \sim x$, então

$$1 = \liminf_{x\to\infty} \psi(x)/x \leqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)}.$$

Isto mostra (i).

Para (ii), tome $\alpha \in (0, 1)$. Então

$$\psi(x) \geqslant \sum_{p \leqslant x} \log(p) \geqslant \sum_{x^\alpha \leqslant p \leqslant x} \log(x^\alpha) \geqslant \big(\pi(x) - \pi(x^\alpha)\big) \log(x^\alpha).$$

[3] *Atualização (novembro de 2026):* em outubro de 2026, a OpenAI divulgou uma demonstração, produzida por um modelo de inteligência artificial, de que $\zeta(s) \neq 0$ para $\mathrm{Re}(s) > 7/8$ (ainda sem revisão por pares); em particular, $\beta \leqslant 7/8$. Veja os preprints em `https://github.com/openai/math`.

Logo,

$$\psi(x) + \alpha\,\pi(x^\alpha)\log(x) \geqslant \alpha\,\pi(x)\log(x),$$

donde

$$\frac{\psi(x)}{x} + \alpha\frac{\pi(x^\alpha)}{x/\log(x)} \geqslant \alpha\frac{\pi(x)}{x/\log(x)}.$$

Como $\pi(x^\alpha) \leqslant x^\alpha$ e $\alpha < 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x^\alpha)}{x/\log(x)} = 0.$$

Logo,

$$1 = \limsup_{x\to\infty} \Big(\frac{\psi(x)}{x} + \alpha\frac{\pi(x^\alpha)}{x/\log(x)}\Big) \geqslant \alpha \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)}.$$

Fazendo $\alpha \to 1$, obtemos (ii). □

Observação 27.13. A volta também vale, isto é, o TNP é equivalente a $\psi(x) \sim x$.

Qual a relação com a função ζ?

Lema 27.14. *Se* $\mathrm{Re}(s) > 1$*, então*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Demonstração. Pelo produto de Euler,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

Lembrando que $p^{-s} = e^{-s\log p}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p -\frac{(1-\frac{1}{p^s})'}{1-\frac{1}{p^s}} = -\sum_p \frac{\log(p)\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^s}} \\ &= -\sum_p \log(p) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ms}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.\end{aligned}$$

□

Aula 28

29) O teorema dos números primos (ideia da demonstração)

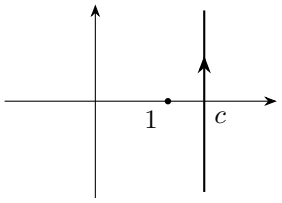
Aula passada. Vimos:

- TNP $\iff \psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \sim x$;
- $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$

Note que $\pi(x)$ é uma soma sobre os *primos* $p \leqslant x$, enquanto $\psi(x)$ é uma soma sobre *todos* os inteiros $n \leqslant x$; por isso preferimos trabalhar com ψ.

Proposição 28.1. *Se $c > 1$, então*

$$\int_1^x \psi(u)\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big)\,ds \qquad (x > 1).$$



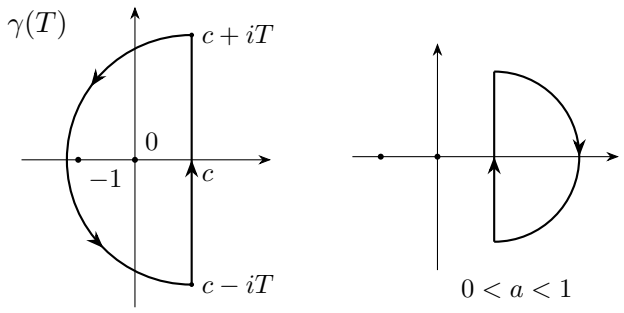
Trata-se de uma "transformada inversa de Mellin"

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\varphi(s)\,ds.$$

Esboço da demonstração. (i)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)}\,ds = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ 1 - 1/a, & 1 \leqslant a. \end{cases}$$

Ideia ($a \geqslant 1$): escreva $a^s = e^{s\log(a)}$ e considere o contorno $\gamma(T)$ formado pelo segmento de $c - iT$ a $c + iT$ e pelo semicírculo $C(T)$ de centro c e raio T à esquerda:



Pelo teorema dos resíduos,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)} \frac{a^s}{s(s+1)}\,ds = \underbrace{1}_{\mathrm{Res}_{s=0}} - \underbrace{\frac{1}{a}}_{\mathrm{Res}_{s=-1}} = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{c-iT}^{c+iT} \cdots + \underbrace{\int_{C(T)} \cdots}_{O(1/T)}\Big).$$

Fazendo $T \to \infty$, obtemos o resultado. Se $0 < a < 1$, fechamos o contorno com um semicírculo à direita, onde não há polos.

(ii) Como a série de Dirichlet converge absolutamente em $\mathrm{Re}(s) = c > 1$, podemos trocar a soma com a integral:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big)\,ds &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, x\, \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)}\,ds \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, x\Big(1-\frac{n}{x}\Big)\mathbf{1}_{[n,\infty)}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(x-n)\,\mathbf{1}_{[n,\infty)}(x) \\
&= \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)(x-n).
\end{aligned}$$

(iii) Por outro lado,

$$\psi(u) = \sum_{n\leqslant u} \Lambda(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\,\mathbf{1}_{[n,\infty)}(u),$$

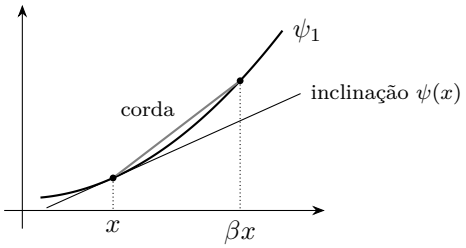
logo

$$\begin{aligned}
\int_1^x \psi(u)\,du &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \int_1^x \mathbf{1}_{[n,\infty)}(u)\,du \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(x-n)\,\mathbf{1}_{[n,\infty)}(x) = \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)(x-n). \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposição 28.2. $\displaystyle\int_1^x \psi(u)\,du \sim \frac{x^2}{2} \implies \psi(x) \sim x.$

Demonstração. Seja $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(u)\,du$. Como $\psi = \psi_1'$ é crescente (ψ_1 é convexa),

$$\psi(x) \leqslant \frac{\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)}{\beta x - x} \qquad \forall \beta > 1.$$



Logo

$$\frac{\psi(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\Big(\frac{\psi_1(\beta x)}{(\beta x)^2}\beta^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2}\Big),$$

logo

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\cdot\frac{\beta^2-1}{2} = \frac{\beta+1}{2}.$$

Fazendo $\beta \to 1$, obtemos $\limsup_{x\to\infty} \psi(x)/x \leqslant 1$. A demonstração de que $\liminf_{x\to\infty} \psi(x)/x \geqslant 1$ é análoga. □

Resta mostrar que

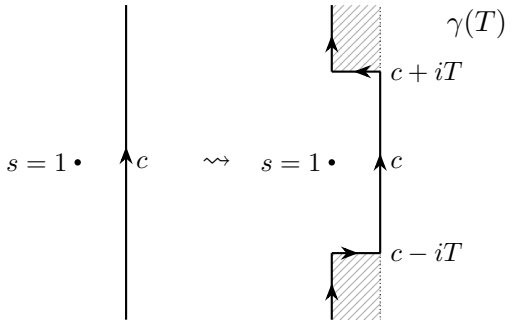
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \underbrace{\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big)}_{F(s)}\, ds \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Ideia: $c \to 1 \rightsquigarrow x^2$ no integrando.

(i) "Princípio da deformação de caminhos":

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)} F(s)\, ds,$$

onde $\gamma(T)$ é o caminho abaixo.



Para isso, é preciso mostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1\pm it}^{c\pm it} F(s)\, ds \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

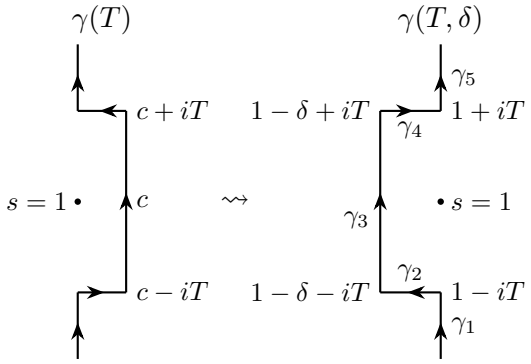
(de modo que as integrais sobre os bordos das regiões hachuradas se anulam no limite). Isto segue de:

Teorema 28.3 (Comportamento em $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$)**.**

(a) $\zeta(s) \neq 0$ *se* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$*;*

(b) para todo $r > 0$*,* $\zeta'(s)/\zeta(s) = O(|\mathrm{Im}\, s|^r)$ *em* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ *(quando* $|\mathrm{Im}\, s| \to \infty$*).*

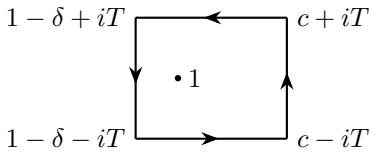
Agora passamos a um caminho da forma $\gamma(T, \delta)$, onde $\delta > 0$ é pequeno o suficiente para que ζ não se anule no retângulo $[1-\delta, 1] \times [-T, T]$ (o que é possível pelo item (a)):



Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)} F(s)\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T)} F(s)\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)\,ds \\ &= \mathrm{Res}_{s=1}\, F(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)\,ds \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(T,\delta)} F(s)\,ds,\end{aligned}$$

pois a diferença $\gamma(T) - \gamma(T, \delta)$ é o bordo, orientado positivamente, do retângulo de vértices $1 - \delta \pm iT$, $c \pm iT$, que contém o polo $s = 1$:



Aqui usamos que $-\zeta'/\zeta$ tem um polo simples de resíduo 1 em $s=1$, logo

$$\operatorname{Res}_{s=1} F(s) = \operatorname{Res}_{s=1}\Big(\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\Big)\Big) = \frac{x^2}{2}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Usando novamente o teorema (item (b)), encontramos $T \gg 0$ tal que

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} F(s)\,ds\Big|,\ \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_5} F(s)\,ds\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}x^2.$$

Em γ_3: $|x^{1+s}| = x^{1+1-\delta} = x^{2-\delta}$; logo existe C (dependendo de T e δ) tal que

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} F(s)\,ds\Big| \leqslant Cx^{2-\delta}.$$

Em γ_2, γ_4:

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} F(s)\,ds\Big| \leqslant (\text{const})\int_{1-\delta}^{1} x^{1+\sigma}\,d\sigma \leqslant \frac{C'}{2}\cdot\frac{x^2}{\log x},$$

pois $x^{1+\sigma} = e^{(1+\sigma)\log x}$. Logo,

$$\Big|\int_1^x \psi(u)\,du - \frac{x^2}{2}\Big| \leqslant \varepsilon x^2 + Cx^{2-\delta} + C'\frac{x^2}{\log x},$$

logo

$$\Big|\frac{\int_1^x \psi(u)\,du}{x^2/2} - 1\Big| \leqslant 2\varepsilon + \frac{2C}{x^\delta} + \frac{2C'}{\log x}.$$

Assim, $\limsup_{x\to\infty}\big|\int_1^x \psi(u)\,du/(x^2/2) - 1\big| \leqslant 2\varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos que

$$\int_1^x \psi(u)\,du \sim \frac{x^2}{2}.$$

Resta mostrar o teorema sobre o comportamento em $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$. Mostraremos apenas a não anulação em $\operatorname{Re}(s) = 1$.

Lema 28.4 (3-4-1)**.** $3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) \geqslant 0$ *para todo* $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 2(1+\cos\theta)^2 &= 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \\ &= 2 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta = 2 + 4\cos\theta + (1+\cos 2\theta). \end{aligned}$$ □

Corolário 28.5 (de la Vallée Poussin)**.** *Se* $\sigma > 1$ *e* $t \in \mathbb{R}$, *então*

$$\log\big|\zeta^3(\sigma)\,\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta(\sigma+2it)\big| \geqslant 0.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}\log(\cdots) &= 3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+2it)| \\ &= 3\operatorname{Re}\big(\log\zeta(\sigma)\big) + 4\operatorname{Re}\big(\log\zeta(\sigma+it)\big) \\ &\quad + \operatorname{Re}\big(\log\zeta(\sigma+2it)\big) =: (*).\end{aligned}$$

Usando $-\log(1-u) = \sum_{m\geqslant 1} u^m/m$ e

$$\frac{1}{p^{ms}} = e^{-s\log p^m} = \frac{1}{p^{m\operatorname{Re}(s)}} e^{-i\operatorname{Im}(s)\log p^m},$$

temos, para $\operatorname{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\log\zeta(s) &= \operatorname{Re}\log\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = -\operatorname{Re}\sum_p \log\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) \\ &= \operatorname{Re}\sum_p\sum_m \frac{1}{m\,p^{ms}} = \sum_p\sum_m \frac{\cos\big(\operatorname{Im}(s)\log p^m\big)}{m\,p^{m\operatorname{Re}(s)}}.\end{aligned}$$

Logo,

$$(*) = \sum_p\sum_m \frac{1}{m\,p^{m\sigma}}\Big(3 + 4\cos(t\log p^m) + \cos(2t\log p^m)\Big) \geqslant 0,$$

pelo lema 3-4-1. □

Demonstração de (a) (no caso $\operatorname{Re}(s) = 1$*).* Suponha, por absurdo, que $\zeta(1+it_0) = 0$ para algum $t_0 \neq 0$. Como $\zeta(s)/(s-(1+it_0))$ é limitada numa vizinhança de $1+it_0$, temos

$$|\zeta(\sigma+it_0)|^4 = O\big((\sigma-1)^4\big), \qquad \sigma\to 1.$$

Usando que $s=1$ é um polo simples de ζ, concluímos similarmente que

$$|\zeta(\sigma)|^3 = O\big((\sigma-1)^{-3}\big), \qquad \sigma\to 1.$$

Como ζ é holomorfa em $1+2it_0$,

$$|\zeta(\sigma+2it_0)| = O(1), \qquad \sigma\to 1.$$

Isto mostra que, para $\sigma > 1$,

$$1 \leqslant \big|\zeta^3(\sigma)\,\zeta(\sigma+it_0)^4\,\zeta(\sigma+2it_0)\big| = O(\sigma-1), \qquad \sigma\to 1^+,$$

o que implica $\lim_{\sigma\to 1^+}(\cdots) = 0$, contradizendo $(\cdots)\geqslant 1$. Absurdo! □

Provas

Várias das questões abaixo foram tiradas (ou adaptadas) dos exercícios do livro de Stein e Shakarchi.

Prova 1 – 15/04/2026

Questão 1 (2,5 pontos). Marque verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique rapidamente.

(a) **(V)** Se $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função de classe C^1 tal que $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$, então sua conjugada complexa $\overline{f}$ é uma função inteira.

(b) **(V)** Se uma série de potências converge em todo ponto de um disco aberto centrado na origem, então ela converge absolutamente neste mesmo disco.

(c) **(V)** Dados $a, b, c \in \mathbb{C}$ com $a \neq 0$, se $f(z) = az^2 + bz + c$, então existe um ponto z no círculo unitário tal que $|f(z)| \geqslant |a|$.

(d) **(V)** Existe uma função inteira não constante limitada em todo subconjunto da forma $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = c\}$, com $c \in \mathbb{R}$.

(e) **(F)** Existe uma função inteira f tal que $f(1/n) = (-1)^n/n$ para todo inteiro $n \geqslant 1$.

Solução. (a) $\overline{f}$ é inteira pois é de classe C^1 em $\mathbb{C}$ e satisfaz as equações de Cauchy–Riemann: $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \equiv 0$.

(b) Segue da seguinte propriedade do raio de convergência R: a série converge absolutamente se $|z| < R$ e diverge se $|z| > R$.

(c) Pela estimativa de Cauchy no disco unitário: $|2a| = |f''(0)| \leqslant 2 \sup_{|z|=1} |f(z)| = 2 \max_{|z|=1} |f(z)|$.

(d) A função exponencial: $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^c$ na reta $\operatorname{Re} z = c$.

(e) Por absurdo, uma tal função f coincidiria com z em todo ponto da forma $1/(2k)$ e com $-z$ em todo ponto da forma $1/(2k+1)$, o que implicaria $z = -z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pelo princípio da continuação analítica.

Solução alternativa: por continuidade, $f(0) = 0$. Como f é holomorfa em 0, o limite $f'(0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n)/(1/n) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ existiria, o que é absurdo. □

Questão 2 (2 pontos).

(a) Mostre que, se $f\colon D_1(0) \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa tal que $|f|$ é constante, então f é constante.

(b) Determine o raio de convergência da série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)z^n$$

e calcule o valor exato de $f(1/2)$.

Solução. (a) Pelas equações de Cauchy–Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0. \tag{1}$$

Podemos supor que f não é identicamente nula. Como $|f|$ é constante, isto implica que f nunca se anula. Logo,

$$0 \equiv \frac{\partial |f|^2}{\partial z} = \frac{\partial (f\overline{f})}{\partial z} \overset{(*)}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\,\overline{f} \implies \frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0, \tag{2}$$

onde usamos novamente as equações de Cauchy–Riemann, na forma $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} \equiv 0$, em $(*)$. Concluímos de (1) e (2) que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ se anulam identicamente no conexo $D_1(0)$. Portanto, f é constante.

(b) A série geométrica $1/(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tem raio de convergência 1; em particular, suas derivadas têm o mesmo raio de convergência. Como $f(z)$ é a segunda derivada de $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, concluímos que f tem raio de convergência 1 e

$$f(1/2) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z}\right)\bigg|_{z=1/2} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 16. \qquad \square$$

Questão 3 (2,5 pontos).

(a) Enuncie a fórmula integral de Cauchy e esboce uma demonstração.

(b) Calcule

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2},$$

onde C é o círculo de centro $1+i$ e raio 2, orientado positivamente.

Solução. (a) Se Ω é um aberto contendo um disco fechado $\overline{D}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $z \in D$ é um ponto do interior do disco, então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Para uma demonstração, consideramos "contornos de fechadura" com círculo maior ∂D, círculo menor de raio $\varepsilon > 0$ centrado em z e corredor de largura $\delta > 0$. Como $f(w)/(w - z)$ é holomorfa numa vizinhança do contorno e do seu interior, o teorema de Cauchy implica que sua integral sobre esses contornos se anula. Fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\, dt$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Fazendo $\varepsilon \to 0$ e usando a continuidade de f em z, concluímos que a integral acima vale $2\pi i f(z)$.

(b) Note que $1/(1 + z^2) = 1/((z - i)(z + i))$ e que o ponto i está no interior do círculo (pois $|1 + i - i| = 1 < 2$), mas $-i$ não está (pois $|1 + i - (-i)| = |1 + 2i| = \sqrt{5} > 2$). Logo, $1/(z + i)$ é holomorfa numa vizinhança do disco fechado $\overline{D}_2(1 + i)$ e podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy:

$$\int_C \frac{dz}{1 + z^2} = \int_C \frac{1/(z + i)}{z - i}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{i + i} = \pi. \qquad \square$$

Questão 4 (4 pontos). Lembremos que $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$ (se $\operatorname{Re} s > 0$) e $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}$ (se $\operatorname{Re} s > 1$). O objetivo desta questão é demonstrar que a função holomorfa $\Gamma(s)\zeta(s)$, definida em $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$, admite uma continuação analítica a

$$\Omega' = \{s \in \mathbb{C} : s \neq 1, 0, -1, -2, -3, \dots\}.$$

Sejam

$$I_1(s) = \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx, \qquad I_2(s) = \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

(a) Mostre que, para todo $s \in \Omega$, vale $I_1(s) + I_2(s) = \Gamma(s)\zeta(s)$. Neste item, não é preciso estudar a convergência das integrais; apenas verifique a identidade formalmente.

(b) Mostre que $I_2(s)$ define uma função inteira.

(c) Seja B_n o n-ésimo número de Bernoulli.[4] Mostre que, para todo $s \in \Omega$, vale

$$I_1(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!\,(s + n - 1)}.$$

[4] Os números de Bernoulli são definidos por $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_n \frac{B_n}{n!} x^n$.

(d) Verifique que a série do item anterior converge em todo ponto de Ω' e define uma função holomorfa neste aberto.

Solução. (a) Temos

$$\begin{aligned} I_1(s) + I_2(s) &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx = \int_0^\infty x^{s-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx \\ &= \int_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx \\ &\overset{t=nx}{=} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt = \zeta(s)\Gamma(s). \end{aligned}$$

(b) A integral $I_2(s)$ é absolutamente convergente para cada $s \in \mathbb{C}$ pois, quando $x \to \infty$,

$$\left|\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\right| = \frac{x^{\operatorname{Re} s-1}}{e^x-1} = O(e^{-x/2}).$$

Para todo inteiro $n \geqslant 1$,

$$f_n(s) = \int_1^n \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx$$

é uma função inteira, pois o integrando é uma função contínua de (s,x) em $\mathbb{C}\times[1,n]$ e inteira na variável s para cada $x \in [1,n]$ fixado. Resta ver que $f_n(s) \to I_2(s)$ uniformemente em todo compacto de $\mathbb{C}$. Seja $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ e seja $C = C(\sigma_0)$ uma constante tal que

$$\frac{x^{\sigma_0-1}}{e^x-1} \leqslant Ce^{-x/2} \qquad \text{para todo } x \geqslant 1.$$

Se $\operatorname{Re} s \leqslant \sigma_0$, então $|x^{s-1}| \leqslant x^{\sigma_0-1}$ para $x \geqslant 1$ e

$$|I_2(s) - f_n(s)| \leqslant \int_n^\infty \frac{x^{\sigma_0-1}}{e^x-1}\,dx \leqslant C\int_n^\infty e^{-x/2}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Note que a convergência é uniforme no conjunto dos s com $\operatorname{Re} s \leqslant \sigma_0$, que contém qualquer compacto dado para σ_0 grande.

Observação: também é possível justificar que $I_2(s)$ é inteira usando os teoremas de Morera e de Fubini.

(c) Expandindo em série de potências (absolutamente convergente se $|x| < 2\pi$),

$$\frac{x^{s-1}}{e^x-1} = x^{s-2}\,\frac{x}{e^x-1} = x^{s-2}\sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!}x^n.$$

Como $\mathrm{Re}(s-2) > -1$, a função acima é integrável no intervalo $[0,1]$ e, integrando termo a termo, obtemos

$$I_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \int_0^1 x^{s+n-2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!\,(s+n-1)}.$$

(d) Seja $R > 0$ e seja $N = N(R)$ tal que $1/(s+n-1)$ é holomorfa numa vizinhança de $K = \overline{D}_R(0)$ para todo $n \geqslant N$ (isto é, $N > R+1$). Basta verificar que a série de funções holomorfas $\sum_{n \geqslant N} B_n/\big(n!\,(s+n-1)\big)$ converge uniformemente em K: os finitos termos restantes são holomorfos em $K \cap \Omega'$. Existe $c = c(R) > 0$ tal que

$$|s+n-1| \geqslant c$$

para todo $n \geqslant N$ e todo $s \in K$ (por exemplo, $c =$ a distância de K ao conjunto dos inteiros $1-n$ com $n \geqslant N$). Logo,

$$\left| \frac{B_n}{n!\,(s+n-1)} \right| \leqslant \frac{1}{c}\, \frac{|B_n|}{n!}.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} |B_n|/n!$ converge (pois a série de potências de $x/(e^x-1)$ tem raio de convergência $2\pi > 1$), concluímos pelo teste M de Weierstrass que $\sum_{n \geqslant N} B_n/\big(n!\,(s+n-1)\big)$ converge absoluta e uniformemente em K.

Comentário sobre integração termo a termo. Nos itens (a) e (c), trocamos uma integral imprópria com uma soma infinita, o que nem sempre é permitido. Nos casos acima, isso pode ser justificado pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, ou por uma conta direta. Por exemplo, no item (a):

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\Gamma(s) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{N} e^{-nx} x^{s-1}\, dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-(N+1)x}}{1-e^{-x}}\, x^{s-1}\, dx \\
&= I_1(s) + I_2(s) - \lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-Nx}}{e^x - 1}\, x^{s-1}\, dx.
\end{aligned}$$

O último limite se anula pois, usando que $e^x - 1 \geqslant x$, a integral dentro do limite é limitada (em módulo) por $\Gamma(\sigma-1)/N^{\sigma-1}$, onde $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1$. □

Prova 2 – 24/06/2026

Questão 1 (3 pontos). Marque verdadeiro (V) ou falso (F) e justifique rapidamente.

(a) **(V)** Os resíduos da função racional $(5z^4 - 4)/(z^5 - 4z + 2)$ são todos inteiros.

(b) **(V)** O polinômio $z^4 - 8z + 10$ não tem nenhuma raiz no disco unitário $\mathbb{D}$.

(c) **(F)** Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é um aberto qualquer e $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função harmônica, então u é a parte real de uma função holomorfa em Ω.

(d) **(V)** Existe uma função holomorfa sobrejetiva de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{C}$.

(e) **(F)** Se log denota o ramo principal do logaritmo, então $\log(z^2) = 2\log z$ em todo z onde $\log z$ e $\log(z^2)$ estão definidos.

(f) **(F)** A função Γ tem singularidade essencial no infinito.

Solução. (a) Esta função racional é a derivada logarítmica f'/f de $f(z) = z^5 - 4z + 2$; portanto, seus resíduos são as multiplicidades dos zeros de f (que não tem polos).

(b) Tomando $f(z) = 10$ e $g(z) = z^4 - 8z$, temos $|f(z)| = 10 > 9 \geqslant |g(z)|$ sempre que $|z| = 1$. Pelo teorema de Rouché, $f + g$ tem o mesmo número de zeros que f em $\mathbb{D}$, ou seja, nenhum.

Solução alternativa: as escolhas $f(z) = z^4 + 10$ e $g(z) = -8z$, ou ainda $f(z) = 10 - 8z$ e $g(z) = z^4$, também funcionam.

(c) Isso só vale em geral quando Ω é simplesmente conexo. Por exemplo, a função $u(z) = \log|z|$ não é a parte real de nenhuma função holomorfa em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(d) Basta considerar uma aplicação conforme de $\mathbb{D}$ sobre um semiplano aberto que contém uma reta pela origem (por exemplo, $\{\operatorname{Re} z > -1\}$) e compor com $z \mapsto z^2$: todo $w \in \mathbb{C}$ tem uma raiz quadrada com parte real $\geqslant 0$.

(e) Se $z = e^{2\pi i/3}$, então $\log(z^2) = \log(e^{4\pi i/3}) = 4\pi i/3 - 2\pi i$, enquanto $2\log z = 4\pi i/3$.

(f) O infinito não é uma singularidade isolada de Γ, que tem polos em todos os inteiros $\leqslant 0$. □

Questão 2 (3 pontos). Os itens a seguir são independentes.

(a) Obtenha a expansão em série de Laurent centrada em $3i$ da função

$$\frac{z}{(z^2+9)^2}$$

e determine o seu maior domínio de convergência. (Dica: considere primeiro a função $1/(z^2+9)$.)

(b) Calcule

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz,$$

onde γ_R é o segmento de reta de $1-iR$ a $1+iR$. (Dica: considere semicírculos de raio R com base na reta $\operatorname{Re} z = 1$.)

Solução. (a) Temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2+9} &= \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} = \frac{1}{z-3i}\cdot\frac{1}{6i+(z-3i)} = \frac{1}{z-3i}\cdot\frac{1/(6i)}{1+\frac{z-3i}{6i}} \\ &= \frac{1}{z-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6i}\left(\frac{z-3i}{6i}\right)^n = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(6i)^{n+2}}(z-3i)^n.\end{aligned}$$

A série geométrica acima converge absolutamente se $0<|z-3i|<6$, isto é, para $z\in D_6(3i)\setminus\{3i\}$. Derivando termo a termo,

$$\frac{-2z}{(z^2+9)^2} = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(6i)^{n+2}}(z-3i)^{n-1},$$

ou seja,

$$\frac{z}{(z^2+9)^2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(6i)^{n+3}}(z-3i)^n,$$

com maior domínio de convergência o disco furado $D_6(3i)\setminus\{3i\}$.

(b) Seja $f(z) = e^z/(z(z+1))$. A função f tem polos simples em 0 e -1, com resíduos

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = \frac{e^0}{0+1} = 1, \qquad \operatorname{Res}_{z=-1} f = \frac{e^{-1}}{-1} = -\frac{1}{e}.$$

Seja C_R o semicírculo de centro 1 e raio R, à esquerda da reta $\operatorname{Re} z = 1$, com ponto inicial $1+iR$ e ponto final $1-iR$. Se $R>2$, o teorema dos resíduos dá

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right). \qquad (*)$$

Se $R > 2$ e $z \in C_R$, então $|z-1| = R$ e $\operatorname{Re} z \leqslant 1$; logo $|z| \geqslant R-1$, $|z+1| \geqslant R-2$ e

$$|f(z)| = \frac{e^{\operatorname{Re} z}}{|z||z+1|} \leqslant \frac{e}{(R-1)(R-2)}.$$

Portanto,

$$\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \leqslant \frac{e\pi R}{(R-1)(R-2)} \longrightarrow 0, \qquad R \to +\infty.$$

Tomando o limite em $(*)$, concluímos que a integral do enunciado vale $2\pi i(1-1/e)$. □

Questão 3 (2 pontos). Seja f uma função inteira injetiva. O objetivo desta questão é mostrar que f é uma função afim, isto é, da forma $f(z) = az + b$ para alguns $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

(a) Mostre que f não tem uma singularidade removível no infinito.

(b) Mostre que f não tem uma singularidade essencial no infinito.

(c) Mostre que f é uma função polinomial.

(d) Conclua que f é afim.

Solução. Seja $g(z) = f(1/z)$. Note que g é injetiva, holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e limitada quando $|z| \to +\infty$.

(a) Por absurdo, se g tem singularidade removível em 0, então g se estende a uma função inteira e limitada. Pelo teorema de Liouville, g é constante, o que contradiz a sua injetividade.

Solução alternativa: também é possível argumentar pela série de Laurent.

(b) Por absurdo, suponha que g tem singularidade essencial em 0. Pelo teorema da aplicação aberta, $U = g(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ é aberto (e não vazio). Pelo teorema de Casorati–Weierstrass, $V = g(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ é denso em $\mathbb{C}$. Logo, $U \cap V \neq \emptyset$, o que contradiz a injetividade de g.

(c) Pelos itens (a) e (b), f tem um polo no infinito e, portanto, define uma função meromorfa na esfera de Riemann. Por um teorema visto em aula, f é uma função racional. Como f não tem singularidades em $\mathbb{C}$, f é polinomial.

(d) Seja $n \geqslant 0$ o grau de f. Basta observar que, se $n \neq 1$, então f não é injetiva:

- se $n = 0$, então f é constante;
- se $n \geqslant 2$, seja $w \in \mathbb{C}$ tal que todos os zeros de $f(z) - w$ são simples: basta tomar w fora do conjunto finito $f(\{z \in \mathbb{C} : f'(z) = 0\})$. Pelo teorema fundamental da álgebra, $f(z) - w$ tem $n \geqslant 2$ zeros distintos. □

Questão 4 (3 pontos).

(a) Construa uma função holomorfa de $\mathbb{D}$ em si mesmo sem nenhum ponto fixo. (Dica: considere primeiro o semiplano superior.)

(b) Dado $\alpha \in \mathbb{D}$, mostre que existem infinitos automorfismos do disco que têm α como ponto fixo.

(c) Mostre que, se $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ é uma função holomorfa com dois pontos fixos distintos, então f é a identidade.

Solução. (a) A aplicação $T(z) = z + 1$ é um automorfismo do semiplano superior $\mathbb{H}$ sem nenhum ponto fixo. Se $C\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ denota o biholomorfismo $z \mapsto (z - i)/(z + i)$, então $C \circ T \circ C^{-1}$ é um automorfismo de $\mathbb{D}$ sem nenhum ponto fixo.

(b) Dado $\theta \in \mathbb{R}$, seja $R_\theta\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ a rotação $z \mapsto e^{i\theta} z$, que tem 0 como ponto fixo. Se $\psi_\alpha\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ denota o automorfismo involutivo $z \mapsto (\alpha - z)/(1 - \overline{\alpha} z)$, que troca 0 e α, então todo automorfismo da forma $\psi_\alpha \circ R_\theta \circ \psi_\alpha$ tem α como ponto fixo. Para ver que eles são em número infinito (não enumerável!), basta observar que

$$\psi_\alpha \circ R_\theta \circ \psi_\alpha = \psi_\alpha \circ R_{\theta'} \circ \psi_\alpha \iff R_\theta = R_{\theta'} \iff \theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

(c) Sejam $\alpha \neq \beta$ pontos fixos de f. Então $g = \psi_\alpha \circ f \circ \psi_\alpha$ é uma função holomorfa de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}$ tal que $g(0) = 0$, e g tem o ponto fixo $\psi_\alpha(\beta) \neq 0$. Como $|g(z_0)| = |z_0|$ em $z_0 = \psi_\alpha(\beta) \neq 0$, segue do lema de Schwarz que g é uma rotação; como g tem um ponto fixo diferente de 0, g é a identidade. Logo, $f = \psi_\alpha \circ g \circ \psi_\alpha$ também é a identidade. □

Anexo

A fórmula integral de Cauchy e o teorema fundamental da álgebra

Tiago J. Fonseca — abril de 2026

Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^1. Denotando um número complexo $z \in U$ por $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, podemos interpretar f como uma função em duas variáveis reais x, y a valores complexos.

A diferencial, ou derivada exterior, de f é dada pela fórmula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

O objeto acima é uma 1-forma diferencial (de classe C^0) em U a valores complexos, que podemos reescrever da seguinte maneira:

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx + i\, dy) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx - i\, dy).$$

Repare que $dx + i\, dy = dz$ (a diferencial da identidade $z \mapsto z$) e $dx - i\, dy = d\overline{z}$ (a diferencial da conjugação complexa $z \mapsto \overline{z}$). Assim, se definirmos os operadores diferenciais, ditos *operadores de Cauchy–Riemann*, ou *derivadas de Wirtinger*,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

obtemos a seguinte expressão alternativa para a diferencial de f:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z}.$$

Definição 1. Dizemos que f é *holomorfa* se $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ identicamente em U. Neste caso, denotamos $\partial f/\partial z = f'$ e denominamos esta função de *derivada complexa* de f.[5]

Observação 2. Considerando as partes real e imaginária de f na equação $\partial f/\partial \overline{z} = 0$, obtemos as chamadas *equações de Cauchy–Riemann*.

Segue das regras usuais de derivação para derivadas parciais (linearidade, regra do produto) que o conjunto de funções holomorfas em U forma uma $\mathbb{C}$-álgebra, e que a derivada complexa é $\mathbb{C}$-linear e satisfaz $(fg)' = f'g + fg'$. Além disso, se $a \in U$ é tal que $f(a) \neq 0$, então a função $1/f$ é holomorfa em uma vizinhança de a e vale $(1/f)' = -f'/f^2$.

[5] Aqui, estamos supondo de início que f seja de classe C^1. Na maioria das referências, a holomorficidade é definida somente em termos da existência dos limites $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$. Esta definição implica, de maneira não trivial, que f é necessariamente de classe C^1, e pode-se mostrar então que ambas as definições são equivalentes.

Exemplo 3 (Funções polinomiais)**.** Um cálculo direto mostra que a função identidade $z \mapsto z$ é holomorfa:

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy) = \frac{1}{2}(1+i^2) = 0.$$

Verifica-se diretamente, também, que $\partial z/\partial z = 1$. Então, pelas observações acima, todo polinômio com coeficientes complexos $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ define uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ cuja derivada complexa é dada pela regra usual: $f'(z) = na_n z^{n-1} + \cdots + a_1$.

A seguir, utilizaremos a seguinte reformulação de holomorficidade em termos de formas diferenciais.

Lema 4. *Uma função $f\colon U \to \mathbb{C}$ de classe C^1 é holomorfa se, e somente se, a 1-forma $f\,dz$ é fechada.*

Demonstração. O enunciado segue imediatamente da equação abaixo, válida para qualquer função $f\colon U \to \mathbb{C}$ de classe C^1:

$$d(f\,dz) = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z} \wedge dz = 2i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dx \wedge dy. \quad \square$$

Teorema 5 (Cauchy)**.** *Seja $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, $\overline{D}$ um disco fechado contido em U e $a \in D$ um ponto no seu interior. Então:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

A integral acima é tomada no sentido da integração de formas diferenciais em subvariedades. O círculo ∂D é considerado com a sua orientação positiva usual.

Demonstração. Dado um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, seja $A_\varepsilon = \overline{D} \setminus D_\varepsilon(a)$ o subconjunto fechado de $\overline{D}$ dos pontos a distância pelo menos ε de a. Como a função $z \mapsto f(z)/(z-a)$ é holomorfa em uma vizinhança aberta de A_ε, segue do Lema 4 e do teorema de Stokes que

$$0 = \int_{A_\varepsilon} d\left(\frac{f(z)}{z-a}\,dz\right) = \int_{\partial A_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{\partial D_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \tag{1}$$

Considerando a parametrização $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \partial D_\varepsilon(a)$ dada por $\gamma(t) = a + \varepsilon e^{it}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz &= \int_0^{2\pi} \gamma^*\left(\frac{f(z)}{z-a}\,dz\right) = \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-a}\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\,i\varepsilon e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{it})\,dt.\end{aligned}$$

Daí, segue de (1) (que vale para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno) e da continuidade de f em a que

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \\ &= i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{it})\,dt = i\int_0^{2\pi} f(a)\,dt = 2\pi i f(a). \qquad \square\end{aligned}$$

O resultado acima é surpreendente pois afirma que os valores de uma função holomorfa no interior de um disco são completamente determinados pelos seus valores no bordo deste disco. É uma manifestação da "rigidez" das funções holomorfas.

Observação 6. Uma consequência mais ou menos imediata da fórmula integral de Cauchy, que não faremos aqui, é que funções holomorfas são analíticas, isto é, localmente dadas por séries de potências; em particular, são infinitamente diferenciáveis.

A seguir, precisaremos apenas do corolário seguinte, que também é bastante surpreendente, pois diz que uma derivada é uma integral!

Corolário 7 (Cauchy)**.** *Nas condições do teorema anterior, a derivada complexa de f em a é dada por:*

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

Demonstração. Considerando a como uma variável complexa na fórmula integral de Cauchy, basta aplicar o operador $\partial/\partial a$ e utilizar o resultado clássico de "derivação sob o sinal da integral" para funções de classe C^1 (também conhecido como regra de Leibniz). $\square$

Uma função holomorfa em todo o plano complexo é dita *função inteira*. Pelo Exemplo 3, funções polinomiais são inteiras.

Teorema 8 (Liouville)**.** *Toda função inteira e limitada é constante.*

Demonstração. Como f é inteira, se $a \in \mathbb{C}$ e $R > 0$, segue do Corolário 7 e da "desigualdade triangular para integrais" que

$$\begin{aligned}|f'(a)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_R(a)} \left|\frac{f(z)}{(z-a)^2}\right| |dz| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sup_{z\in\partial D_R(a)}|f(z)|}{R^2}\right) 2\pi R \leqslant \frac{\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|}{R}.\end{aligned}$$

Note que $\sup_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$ é finito pois f é limitada. Fazendo $R\to\infty$, obtemos $f'(a) = 0$. Como isto vale para um $a \in \mathbb{C}$ arbitrário, temos que $df = f'\,dz = 0$ identicamente em $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ é conexo, concluímos que f é constante. $\square$

Corolário 9 (Teorema fundamental da álgebra)**.** *O corpo dos números complexos é algebricamente fechado.*

Demonstração. Seja $n \geqslant 1$ um inteiro e $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ uma função polinomial com coeficientes $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, \ldots, n$, e suponha que $a_n \neq 0$. Por contradição, se f não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{C}$, então a função $1/f$ é inteira. Mas

$$\frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{|a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0|} = \frac{1}{|z|^n} \frac{1}{\left| a_n + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|}$$

tende a 0 quando $|z| \to \infty$. Como $1/f$ é contínua, isto implica que $1/f$ é limitada. Pelo teorema de Liouville, $1/f$ é constante. Logo, f é constante, o que contradiz as hipóteses $n \geqslant 1$ e $a_n \neq 0$. □