Beabá de categorias*

Tiago J. Fonseca
tfonseca@unicamp.br

28 de julho de 2023

A teoria de categorias lida com diferentes estruturas matemáticas (*categorias*), as relações entre elas (*funtores*) e as relações entre as relações entre elas (*transformações naturais*).

1 Categorias

Definição 1.1. Uma categoria C consiste em

- Uma classe[1] $\mathrm{Ob}(C)$ de *objetos*,
- para cada par de objetos X, Y, uma classe $C(X, Y)$ de *morfismos*,
- para cada objeto X, um *morfismo identidade* $\mathrm{id}_X \in C(X, X)$,
- para cada tripla de objetos X, Y, Z, uma operação binária de *composição de morfismos*

$$C(Y, Z) \times C(X, Y) \longrightarrow C(X, Z), \qquad (g, f) \longmapsto g \circ f$$

tais que

- a composição de morfismos é *associativa*: se $f \in C(X, Y)$, $g \in C(Y, Z)$ e $h \in C(Z, W)$, então

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

- se $f \in C(X, Y)$, então

$$f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f.$$

Dizemos que $f \in C(X, Y)$ é um *isomorfismo* se existe $f^{-1} \in C(Y, X)$ tal que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{e} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y\,.$$

Se existe um isomorfismo entre dois objetos X e Y, dizemos que X e Y são *isomorfos*.

Representamos um morfismo $f \in C(X, Y)$ por uma *flecha*

$$f : X \to Y \qquad \text{ou} \qquad X \xrightarrow{f} Y.$$

Note porém que morfismos *não são necessariamente funções*.

Observação 1.2. As notações $C(X, Y) = \mathrm{Hom}_C(X, Y) = \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ também são encontradas frequentemente na literatura.

*Em construção. Versão atual: `https://tjfonseca.github.io/teaching/categorias.pdf`.

[1] A noção de *classe* é mais primitiva que a noção de *conjunto*. Podemos considerar a "classe de todos os conjuntos" ou a "classe de todos os grupos". Veja `https://drive.google.com/file/d/1aQ5UL57nxb2Sm6r9ASVFkSr3Qk6NLauV/view`.

Exemplo 1.3. Nas categorias abaixo, morfismos são funções com alguma propriedade adicional. As noções de composição e de identidade são as usuais.

1. Na *categoria dos conjuntos*, Set, os objetos são conjuntos e os morfismos são funções.

2. Na *categoria dos grupos*, Grp, os objetos são grupos e os morfismos são homomorfismos de grupos.

3. Na *categoria dos espaços topológicos*, Top, os objetos são espaços topológicos e os morfismos são funções contínuas.

Note que usamos implicitamente que composição de homomorfismos de grupos (resp. funções contínuas) é ainda um homomorfismo de grupos (resp. função contínua) e que a identidade é um homomorfismo de grupos (resp. uma função contínua). Na categoria de conjuntos, um isomorfismo é o mesmo que uma bijeção. Na categoria de grupos, um isomorfismo é o mesmo que um isomorfismo de grupos. Na categoria de espaços topológicos, um isomorfismo é o mesmo que um heomeomorfismo.

Exemplo 1.4. Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Podemos formar uma categoria C tal que $\mathrm{Ob}(C) = X$ e existe uma flecha $x \to y$ se e somente se $x \leq y$. Assim, as classes $C(x, y)$ são vazias ou unitárias.

Exercício 1.5. No exemplo acima, interprete de maneira categórica as propriedades de reflexividade, transitividade e anti-simetria de $\leq$.

Definição 1.6. Dizemos que uma categoria S é uma *subcategoria* de uma categoria C se $\mathrm{Ob}(S)$ é uma subclasse de $\mathrm{Ob}(C)$ e $S(X, Y)$ é uma subclasse de $C(X, Y)$ para todos objetos X, Y, de S de maneira que os morfismos identidade e as operações de composição em S e em C coincidam. Se $S(X, Y) = C(X, Y)$ para todos objetos X, Y de S, então dizemos que S é uma *subcategoria plena* de C.

Exemplo 1.7. A categoria Ab dos *grupos abelianos* é uma subcategoria plena de Grp.

Definição 1.8. Seja C uma categoria. A *categoria oposta* C^{op} tem como objetos os mesmos objetos de C, mas o sentido das flechas é invertido: $C^{op}(X, Y) = C(Y, X)$, para todos objetos X, Y.

Exercício 1.9. Mostre que C^{op} é de fato uma categoria e que $(C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = C$.

Observação 1.10 (Para os fundamentalistas). Boa parte dos matemáticos simplesmente ignora as complicações decorrentes do uso de classes próprias na teoria de categorias. Dependendo do contexto, os mais cuidadosos podem se restringir ao uso de categorias pequenas (C é uma *categoria pequena* se as classes $\mathrm{Ob}(C)$ e $C(X, Y)$ são conjuntos para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$) ou apenas localmente pequenas (C é uma *categoria localmente pequena* se as classes $\mathrm{Ob}(C)$ são conjuntos para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$). Note que as categorias Set, Top e Grp não são pequenas mas são localmente pequenas. Um recurso para "forçar" o uso de categorias pequenas em uma determinada teoria é o de *universo de Grothendieck* (veja `https://en.wikipedia.org/wiki/Grothendieck_universe`).

2 Diagramas e propriedades universais

É útil representar um conjunto de morfismos entre diferentes objetos através de um *diagrama* na categoria C, isto é, um grafo dirigido cujos vértices são objetos de C e cujas arestas são morfismos. Por exemplo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Dizemos que um diagrama *comuta*, ou *é comutativo*, se as composições das flechas de quaisquer dois caminhos no diagrama com mesmos vértices inicial e final coincidem. No exemplo acima, o diagrama comuta se e somente se $g \circ f = h$.

Uma *propriedade universal* é uma propriedade que caracteriza de maneira única, possivelmente a menos de isomorfismo, o resultado de alguma construção numa determinada categoria.

Exemplo 2.1 (Grupo quociente)**.** Seja G um grupo e N um subgrupo normal. O grupo quociente de G por N, é um grupo G/N munido de um morfismo de grupos $\pi : G \to G/N$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo grupo H e todo morfismo de grupos $f : G \to H$ tal que $N \subset \ker(f)$, existe um único morfismo de grupos $\overline{f} : G/N \to H$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Esta é a *propriedade universal do grupo quociente.* Se G' é um outro grupo munido de um morfismo $\pi' : G \to G'$ satisfazendo a mesma propriedade universal, então temos diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/N \arrow[ur, "\overline{\pi'}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] & G/N \\ G' \arrow[ur, "\overline{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Os morfismos $\overline{\pi}$ e $\overline{\pi'}$ são inversos um do outro — em particular, G/N e G' são isomorfos. Para ver isto, note que a unicidade da propriedade universal para ($H = G/N$ e $f = \pi$) aplicada ao diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[rr, bend left, "\pi"] & G' \arrow[r, "\overline{\pi}"] & G/N \\ G/N \arrow[ur, "\overline{\pi'}"] \arrow[urr, "\overline{\pi}\circ\overline{\pi'}"'] & & \end{tikzcd}$$

garante que $\overline{\pi} \circ \overline{\pi'} = \mathrm{id}_{G/N}$; demonstramos similarmente que $\overline{\pi'} \circ \overline{\pi} = \mathrm{id}_{G'}$ invertendo os papéis de G/N e G' no argumento acima.

No exemplo anterior, a propriedade universal do grupo quociente pode ser usada para *definir* o grupo quociente sem precisar construí-lo. Isto não garante a existência de um grupo satisfazendo estas propriedades, apenas o caracteriza de maneira única a menos de isomorfismo (caso ele exista). Na filosofia da teoria de categorias, sempre que possível, buscamos definir o resultado de uma construção através de alguma propriedade universal. A existência de objetos e morfismos satisfazendo esta propriedade numa determinada categoria C é um problema a parte, que pode ser resolvido com uma construção ad-hoc.

Exemplo 2.2 (Produto)**.** Seja C uma categoria e sejam X, Y objetos de C. O *produto* de X por Y é um objeto $X \times Y$ munido de morfismos $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \to Y$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo objeto Z munido de morfismos $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$, existe um único morfismo $(f, g) : Z \to X \times Y$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "{(f,g)}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & X \times Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \\ & Y & \end{tikzcd}$$

comutativo (isto é $p \circ (f, g) = f$ e $q \circ (f, g) = g$).

Observação 2.3. Os morfismos p e q, ditos de *projeção*, fazem parte da definição do produto. Em outras palavras, devemos pensar o produto não como um objeto $X \times Y$, mas como um diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

O mesmo comentário se aplica ao Exemplo 2.1: o morfismo $\pi : G \to G/N$ faz parte da definição do grupo quociente.

Exercício 2.4. Mostre que:

1. O produto, se existir, é único a menos de isomorfismo.
2. O produto cartesiano de dois espaços topológicos, munido da topologia produto, com as projeções naturais na primeira e segunda coordenada, é um produto na categoria Top.

Dê um exemplo de uma categoria C associada a um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ (Exemplo 1.4) e de objetos $x, y \in X$ tais que o produto $x \times y$ não existe

Exemplo 2.5 (Coproduto)**.** Seja C uma categoria e sejam X, Y objetos de C. O *coproduto* de X por Y é um objeto $X \sqcup Y$ munido de morfismos $i : X \to X \sqcup Y$ e $j : Y \to X \sqcup Y$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo objeto Z munido de morfismos $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$, existe um único morfismo $f \sqcup g : X \sqcup Y \to Z$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "i"] \arrow[dr, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r, "j"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & X \sqcup Y \arrow[r, "f \sqcup g"] & Z \end{tikzcd}$$

comutativo (isto é $(f \sqcup g) \circ i = f$ e $(f \sqcup g) \circ j = g$).

Exercício 2.6. Mostre que:

1. O coproduto de dois conjuntos, na categoria Set, é isomorfo à união disjunta.
2. O coproduto de dois grupos, na categoria Grp, é isomorfo ao produto amalgamado.
3. O coproduto de dois grupos abelianos, na categoria Ab, é isomorfo à soma direta.

Observação 2.7. Podemos ver Ab como subcategoria plena de Grp e Grp como subcategoria de Set. Note porém que o coproduto é diferente em cada uma dessas categorias.

Exercício 2.8. Seja C uma categoria. Um objeto X de C é dito *inicial* (resp. *terminal*) se satisfaz a propriedade universal seguinte: para todo objeto Y de C, existe um único morfismo $X \to Y$ (resp. $Y \to X$). Mostre que:

1. Objetos iniciais e terminais são únicos a menos de isomorfismo.
2. Na categoria Top, o espaço vazio $\emptyset$ é um objeto inicial, e todo espaço topológico unitário é um objeto terminal.
3. Na categoria Ab, o grupo abeliano trivial 0 é um objeto inicial e terminal.

3 Funtores

Definição 3.1. Sejam C, D categorias. Um *funtor* de C a D, denotado por $F : C \to D$, é uma aplicação que associa

- a cada objeto X de C um objeto $F(X)$ de D,
- a cada morfismo $f : X \to Y$ em C um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em D,

tal que

- $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ para todo objeto X de C,
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ para todos morfismos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ em C.

Um funtor $F : C^{\mathrm{op}} \to D$ é dito um *funtor contravariante* de C a D.

Observação 3.2. Um funtor contravariante é assim chamado porque reverte o sentido das flechas em C. Se $f \in C(X, Y)$ e $g \in C(Y, Z)$, então

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f).$$

Lema 3.3. *Se $F : C \to D$ é um funtor e $f \in C(X, Y)$ é um isomorfismo, então $F(f) \in D(F(X), F(Y))$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $f^{-1} \in C(Y, X)$ o isomorfismo inverso de f. Aplicando F nas identidades

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y\,, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$$

obtemos

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = \mathrm{id}_{F(Y)}\,, \qquad F(f^{-1}) \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(X)},$$

isto é, $F(f^{-1}) \in D(F(Y), F(X))$ é um inverso de $F(f)$. □

Exemplo 3.4. Se S é uma subcategoria de C, então a inclusão $i : S \to C$ é um funtor. Em geral, dada uma categoria C, subclasses $\mathrm{Ob}(S) \subset \mathrm{Ob}(C)$ e $S(X, Y) \subset C(X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(S)$ definem uma subcategoria S de C se e somente se S é uma categoria e a inclusão $i : S \to C$ é um funtor.

Exemplo 3.5. Dado um grupo G, a *abelianização* de G é o grupo abeliano $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$. Se $f : G \to H$ é um morfismo de grupos, então $f([G, G]) \subset [H, H]$, e portanto f induz um morfismo de grupos $f^{\mathrm{ab}} : G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$. Assim, a abelianização é um funtor

$$\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ab}, \qquad \begin{cases} G \mapsto G^{\mathrm{ab}} \\ f \mapsto f^{\mathrm{ab}} \end{cases}$$

Exemplo 3.6. Seja $\mathbb{R}\mathrm{-Alg}$ a categoria das $\mathbb{R}$-álgebras. A todo espaço topológico X, podemos associar uma $\mathbb{R}$-álgebra $C(X; \mathbb{R})$ de funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. Dada uma função contínua $\varphi : X \to Y$, associamos um morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, dito *pullback*,

$$\varphi^* : C(Y; \mathbb{R}) \to C(X; \mathbb{R}), \qquad f \mapsto f \circ \varphi.$$

Obtemos assim um funtor contravariante

$$\mathrm{Top}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{R}\mathrm{-Alg}, \qquad \begin{cases} X \mapsto C(X; \mathbb{R}) \\ \varphi \mapsto \varphi^* \end{cases}$$

Exercício 3.7. Mostre que existe um funtor $\mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ que associa a cada espaço topológico X o conjunto das componentes conexas por caminhos de X.

Definição 3.8. Seja $F : C \to D$ um funtor e considere, para objetos X, Y de C, a aplicação

$$C(X, Y) \to D(F(X), F(Y)), \qquad f \mapsto F(f). \tag{1}$$

Dizemos que F é:

- *fiel* se, para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, a aplicação (1) é injetiva;
- *pleno* se, para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, a aplicação (1) é sobrejetiva;
- *plenamente fiel* se é fiel e pleno;
- *essencialmente sobrejetivo* se todo objeto de D é isomorfo a um objeto da forma $F(X)$, para $X \in \mathrm{Ob}(C)$.

Exemplo 3.9. Se S é uma subcategoria de C, então o funtor de inclusão $i : S \to C$ é fiel. Note que S é uma subcategoria plena de C se e somente se i é pleno.

Exemplo 3.10. Seja k um corpo e $\mathrm{Mat}(k)$ a categoria cujos objetos são números naturais (o que inclui o 0, obviamente) e os morfismos $m \to n$ são matrizes $m \times n$ com coeficientes em k, a composição sendo dada pelo produto de matrizes. Se Vect_k denota a categoria dos k-espaços vetoriais *de dimensão finita*, a existência de bases para espaços vetoriais mostra que o funtor

$$\mathrm{Mat}(k) \to \mathrm{Vect}_k,$$

que associa a cada m o k-espaço vetorial k^m e a cada morfismo $M : m \to n$ a transformação linear $k^m \to k^n$ correspondente à matriz M, é plenamente fiel e essencialmente sobrejetivo.

Exercício 3.11. Mostre que o funtor de abelianização $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ab}$ não é pleno, nem fiel, mas é essencialmente sobrejetivo.

Exercício 3.12. Quais das propriedades da Definição 3.8 valem para o funtor $\mathrm{Top} \to \mathbb{R}\mathrm{-Alg}$ do Exemplo 3.6?

4 Transformações naturais

Em construção.

5 Limites

Em construção.

6 Onde procurar mais informações?

6.1 Referências online

- *Wikipedia*, `https://en.wikipedia.org/`. Sem sacanagem, um ótimo lugar para pesquisar as definições e conceitos básicos da teoria de categorias.
- *nLab*, `https://ncatlab.org/`. Tudo o que você precisa, escrito do jeito mais complicado possível.
- *The Stacks Project*, `https://stacks.math.columbia.edu/tag/0011`. Tem a teoria básica e inclui tópicos mais avançados orientados à geometria algébrica.

6.2 Livros

- S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* O clássico.
- E. Riehl, *Category Theory in Context*, `https://math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf`. Referência introdutória moderna.
- M. F. Silva Ribeiro, *Teoria das Categorias para Matemáticos: uma breve introdução.* Referência introdutória moderna em português.